ローレンツ変換が 1 次関数でなければいけないコトの証明。
―― ローレンツ変換が 1 次式であるコトの証明を、数学的に与えてみるよ♪

■特殊相対論の教科書や解説などで、ローレンツ変換の導き方を説明するときには、ほとんどの場合、「変換式は 1 次式でなければいけない」というコトを、自明な前提としているようです。「なぜ、どうして、変換式が 1 次式でなければいけないのか」という点については、せいぜい、「時空の一様性から」とか、「空間の対称性より」とかいったヒトコトで、済ませてしまっているモノが、圧倒的に多いみたいです。

□実は、アインシュタインが、初めて、特殊相対論を発表した歴史的な論文でも、2 つの慣性系のあいだの座標変換を表す方程式のカタチについての記述は、「我々が空間と時間に付与する一様性のために、方程式が線形でなければならぬのは明らかである」と、「τ は 1 次関数であるから」の、たった 2 つだけです。もちろん、「時空の一様性から、方程式が線形でなければいけないのは、なぜ、明らかなのか」、「空間の対称性より、どうして、τ が 1 次関数であると言えるのか」といったハナシは、まったく、ありません。

■でも、「ローレンツ変換が 1 次式であるコトの証明」は、一見、関係のなさそうなコトが、最後の最後に、見事に繋がって、1 つの証明を完成させる――というオモシロさがあって、「時空の一様性から」とか、「空間の対称性より」とかいったヒトコトで、済ませてしまうのは、もったいないと思うんですよね。そんなワケで、ココでは、藤野なりの「ローレンツ変換が 1 次式であるコトの証明」を、紹介します。「自然や、数学って、ホントに、うまく、できてるんだなぁ」と、思ってもらえると、嬉しいです♪

【目 次】

1. 厳密な証明の前に(1)
――「感覚的に納得できれば良い」という人に向けた説明

2. 厳密な証明の前に(2)
―― スッキリと納得するために（感覚的な説明のつづき）

3. 厳密な証明(1)
―― 逆関数が存在する条件（逆関数定理）

4. 厳密な証明(2)
―― 等速直線運動を等速直線運動に移す変換（アフィン変換）

■1. 厳密な証明の前に(1) ――「感覚的に納得できれば良い」という人に向けた説明

■時刻と位置が座標 $(t,\ x,\ y,\ z)$ で表される慣性系を k 系とします。k 系に対して $+x$ 軸の向きに速さ v で運動している慣性系 $(\tau,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ を κ 系としましょう。もちろん、この場合は、「相対性原理」より、κ 系に対して $+\xi$ 軸の向きに速さ $-v$ で運動している慣性系が k 系というコトになります。

■知りたいのは、k 系の時刻と位置 $(t,\ x,\ y,\ z)$ に対応する、κ 系の時刻と位置 $(\tau,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ を与える法則です。すなわち、k 系の時刻と位置 $(t,\ x,\ y,\ z)$ が与えられたときに、それに対応する κ 系の時刻と位置 $(\tau,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ が計算できるような方程式を、知りたいというワケです。具体的には、4 つの変数 $t,\ x,\ y,\ z$ の値を代入したら、対応する $\tau,\ \xi,\ \eta,\ \zeta$ の、それぞれの値が求まるような、4 つの 4 変数関数、

$$\tau = \tau(t,\ x,\ y,\ z) \tag{1.1a}$$

$$\xi = \xi(t,\ x,\ y,\ z) \tag{1.1b}$$

$$\eta = \eta(t,\ x,\ y,\ z) \tag{1.1c}$$

$$\zeta = \zeta(t,\ x,\ y,\ z) \tag{1.1d}$$

を考えて、コレらの関数が、どんなカタチでなければいけないのかを、調べれば良いでしょう。

□変数を表す記号（左辺）と、関数を表す記号（右辺）を、同じにしたので、ちょっと、まぎらわしいかも知れません。分かりづらいという場合には、$\tau = f(t,\ x,\ y,\ z),\ \xi = g(t,\ x,\ y,\ z),\ \ldots$ のように、関数を表す記号を、適当な好みの記号に替えて、以下のハナシを書き直してくれても、まったく、問題はありません。でも、記号の無駄遣いをしていると、あとで困りそうなので、ココでは、上の記号法を使うコトにします。

■ところで、最初に、k 系と κ 系は、x 軸・ξ 軸に沿った向きにだけ、相対運動をしていると、仮定しました。簡単な考察から、このとき、$\tau(t,\ x,\ y,\ z)$ と $\xi(t,\ x,\ y,\ z)$ は、t と x だけの関数になり、y と z には依存しないコトが、証明できます。また、$\eta(t,\ x,\ y,\ z)$ は y だけの関数、$\zeta(t,\ x,\ y,\ z)$ は z だけの関数になるコトも、同様に証明できます（証明は、多くの教科書や解説などで、詳しく説明されていますので、ココでは割愛します）。そうすると、（1.1a）～（1.1d）式は、次のように、書き表せるコトになります。

$$\tau = \tau(t,\ x) \tag{1.2a}$$

$$\xi = \xi(t,\ x) \tag{1.2b}$$

$$\eta = \eta(y) \tag{1.2c}$$

$$\zeta = \zeta(z) \tag{1.2d}$$

■さらに、$\eta(y) = y + \eta_0$, $\zeta(z) = z + \zeta_0$（$\eta_0,\ \zeta_0$ は初期条件で決まる定数）となるコトも、多くの教科書や解説などで、ちゃんと、説明されていると思います。そこで、ココでは、$\tau = \tau(t,\ x)$ と $\xi = \xi(t,\ x)$ の 2 つの方程式のカタチについて、考えてみるコトにしましょう。

■さて、最初に、「k 系から見て、κ 系は、$+x$ 軸の向きに速さ v で運動している」と、定義していたコトを、思い出して下さい。このコトから、κ 系の原点（$\xi = 0$ の点）に静止している物体を、k 系から見ると、$+x$ 軸の向きに速さ v で運動しているように見えるハズ――というコトが分かります。したがって、k 系から見た、この物体の運動の様子を、式で表せば、

$$x = vt + x_0 \qquad (x_0 \text{ は初期条件で決まる定数}) \tag{1.3}$$

というカタチになっていなければなりません。すなわち、（1.2b）式に、$\xi = 0$ を代入したときに、（1.3）式のようなカタチの式が、導かれなければいけないのです。ココで、もし、仮に、関数 $\xi(t,\ x)$ が、

$$\xi(t,\ x) = At^2 + Bx + C \qquad (A,\ B,\ C \text{ は } t,\ x \text{ に依らない定数}) \tag{1.4}$$

というカタチだったとすると、（1.2b）式に $\xi = 0$ を代入したときに、$0 = \xi(t,\ x) = At^2 + Bx + C$、つまり、

$$x = -\frac{A}{B}t^2 - \frac{C}{B} \qquad (A,\ B,\ C \text{ は } t,\ x \text{ に依らない定数}) \tag{1.5}$$

となって、κ 系に対して静止している物体（つねに、$\xi = 0$ の位置にある物体）を、k 系から見ると、この物体は、加速度 $d^2x/dt^2 = -2A/B$ の等加速度運動をしているコトになってしまいます。コレが、（1.3）式の条件を満たしていないコトは、明らかです。それなら、関数 $\xi(t,\ x)$ が、

$$\xi(t,\ x) = Atx + B \qquad (A,\ B \text{ は } t,\ x \text{ に依らない定数}) \tag{1.6}$$

というカタチだったとしたら、どうでしょうか。同じように、（1.2b）式に $\xi = 0$ を代入すると、

$$x = -\frac{B}{At} \qquad (A,\ B \text{ は } t,\ x \text{ に依らない定数}) \tag{1.7}$$

となるので、この場合も、条件を満たさないコトが分かります。たぶん、ほとんどの人は、このような試行錯誤をしなくても、最初から、直感的に、関数 $\xi(t,\ x)$ が、

$$\xi(t,\ x) = At + Bx + C \qquad (A,\ B,\ C \text{ は } t,\ x \text{ に依らない定数}) \tag{1.8}$$

というカタチ――つまり、1 次式でなければいけないコトに、気づいていたのではないでしょうか。念のため、（1.2b）式に $\xi = 0$ を代入すると、この場合には、

$$x = -\frac{A}{B}t - \frac{C}{B} \qquad (A,\ B,\ C \text{ は } t,\ x \text{ に依らない定数}) \tag{1.9}$$

となるので、$-A/B = v,\ -C/B = x_0$ となるように、定数 A～C の値を決めてやれば、ちゃんと、（1.3）式のカタチ（$x = vt + x_0$: $v,\ x_0$ は定数）になっているのが、分かります。このようにして、「関数 $\xi(t,\ x)$ は、（1.8）式のようなカタチで表される 1 次式でなければいけない」というコトが、明らかになりました。

■さらに、「k 系から見て、κ 系は、$+x$ 軸の向きに速さ v で運動している」というコトは、相対性原理から、「κ 系から見て、k 系は、$+\xi$ 軸の向きに速さ $-v$ で運動している」というコトです。したがって、k 系の原点（$x=0$ の点）に静止している物体を、κ 系から見ると、$+\xi$ 軸の向きに速さ $-v$ で運動しているように見えるハズ——というコトになります。つまり、κ 系から見た、この物体の運動の様子を、式で表せば、

$$\xi = -v\tau + \xi_0 \quad （\xi_0 \text{ は初期条件で決まる定数}） \tag{1.10}$$

というカタチになっていなければなりません。この場合に、運動の様子を表す方程式が、（1.10）式のカタチになるかを確かめるためには、（1.2a）式と（1.2b）式の両方に、$x=0$ を代入してみなければいけません。関数 $\xi(t,\,x)$ のカタチは、すでに、（1.8）式のようになっていると分かっているので、今度は、関数 $\tau(t,\,x)$ のカタチが、明らかになるハズです。試行錯誤をしなくても、直感的に、すぐに、関数 $\tau(t,\,x)$ は、

$$\tau(t,\,x) = Dt + Ex + F \quad （D,\,E,\,F \text{ は } t,\,x \text{ に依らない定数}） \tag{1.11}$$

というカタチ——つまり、1 次式でなければいけないだろうと、ほとんどの人は、確信するでしょう。実際に、（1.2a）式と（1.2b）式の両方に、$x=0$ を代入してみれば、ただちに、

$$\xi = \frac{A}{D}\tau + C - \frac{AF}{D} \quad （A \sim F \text{ は } t,\,x \text{ に依らない定数}） \tag{1.12}$$

が導かれます。言うまでもなく、$A/D=-v,\ C-(AF/D)=\xi_0$ となるように、定数 $A \sim F$ の値を決めれば、コレが、ちゃんと、（1.10）式のカタチになっているコトが分かります。

■でも、コレで、「ローレンツ変換が 1 次式であるコトが、納得できた！」と、早合点しては、いけません。実は、この説明だと、関数 $\tau(t,\,x)$ は、変数 x の次数がナンでも良いというコトになってしまいます。実際に、もし、仮に、関数 $\tau(t,\,x)$ が、$\tau(t,\,x)=Dt+Ex^2+F$ というカタチだったとしても、上と同じような説明が、成り立ってしまうコトが、すぐに、確かめられるでしょう。スッキリと、納得するためには、別の視点からの、さらなる考察が必要です。

■2. 厳密な証明の前に(2) —— スッキリと納得するために（感覚的な説明のつづき）

■ココまで、「k 系の時刻と位置 $(t,\,x,\,y,\,z)$ に対応する、κ 系の時刻と位置 $(\tau,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)$ を与える方程式」を、考えてきました。コレを、「k 系から κ 系への変換（変換式）」と呼ぶコトにしましょう。では、その逆を、考えてみると、どうなるのでしょうか。すなわち、「κ 系の時刻と位置 $(\tau,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)$ に対応する、k 系の時刻と位置 $(t,\,x,\,y,\,z)$ を与える方程式」を、考えてみるワケです（コチラは、「κ 系から k 系への変換（変換式）」と呼びましょう）。まずは、（1.1a）～（1.1d）式と同じように、4 つの変数 $\tau,\,\xi,\,\eta,\,\zeta$ の値を代入したら、対応する $t,\,x,\,y,\,z$ の、それぞれの値が求まるような、4 つの 4 変数関数を、次のように、表してみましょう。

$$t = t(\tau,\,\xi,\,\eta,\,\zeta) \tag{2.1a}$$

$$x = x(\tau,\,\xi,\,\eta,\,\zeta) \tag{2.1b}$$

$$y = y(\tau,\,\xi,\,\eta,\,\zeta) \tag{2.1c}$$

$$z = z(\tau,\,\xi,\,\eta,\,\zeta) \tag{2.1d}$$

■ところで、最初に、k 系と κ 系は、x 軸・ξ 軸に沿った向きにだけ、相対運動をしていると、仮定しました。このとき、ココで考えている「κ 系から k 系への変換」と、第 1 節で考えた「k 系から κ 系への変換」では、それぞれの関数のカタチについて、まったく同じ議論が成り立ちます。すなわち、（2.1a）～（2.1d）式は、（1.2a）～（1.2d）式と同じように、次のように、書き表せるコトになります。

$$t = t(\tau,\,\xi) \tag{2.2a}$$

$$x = x(\tau,\,\xi) \tag{2.2b}$$

$$y = y(\eta) = \eta + y_0 \quad （y_0 \text{ は初期条件で決まる定数}） \tag{2.2c}$$

$$z = z(\zeta) = \zeta + z_0 \quad （z_0 \text{ は初期条件で決まる定数}） \tag{2.2d}$$

□もちろん、この証明について、ほとんどの教科書や解説などでは、詳しく説明しているのは、「k 系から κ 系への変換」か、「κ 系から k 系への変換」の、どちらか 1 つだけです。でも、どちらか片方の証明ができるなら、もう片方の証明は、2 つの慣性系のあいだの相対速度を表す v を、$-v$ に置き換えるだけで、あとは、ほとんど同じですので、ココで、あらためて、解説する必要はないでしょう。

■さらに、第 1 節と同じように、「k 系の原点に静止している物体を、κ 系から見ると、どうなるか」というハナシから、関数 $x(\tau,\,\xi)$ が、次のようなカタチでなければいけないコトが、分かります。

$$x(\tau,\,\xi) = A'\tau + B'\xi + C' \quad （A',\,B',\,C' \text{ は } \tau,\,\xi \text{ に依らない定数}） \tag{2.3}$$

■さて、ココで、あらためて、「k 系から見た κ 系」と「κ 系から見た k 系」について、考えてみましょう。定義により、「κ 系は、k 系から見て、$+x$ 軸の向きに速さ v で運動している慣性系」で、「k 系は、κ 系から見て、$+\xi$ 軸の向きに速さ $-v$ で運動している慣性系」でした。でも、良く考えてみて下さい。「どちらが k 系で、どちらを κ 系と呼ぶか」とか、「どの向きが $+x$ 方向で、どの向きを $-x$ 方向とするのか」とか、そんなコトは、人間が、勝手に決めるコトです。すなわち、自然には、ナニか、基準となるような「特別な慣性系」や「特別な向き」といったモノなどは、ないのです。

□たとえば、宇宙のなかに地球が 1 つだけあるといった場合には、地球の位置を原点とするような慣性系を「特別な慣性系」と言ったり、地球の重力の向きを「特別な向き」と言ったりするコトが、許されるかも知れません。けれども、ナニもない空間で、慣性系を考える場合には、どの慣性系を k 系・κ 系として、どの向きを $+x$ 軸方向・$+\xi$ 軸方向にするのかを、完全に、自由に、好き勝手に選べる——というコトは、くどくどと説明しなくても、納得してもらえるでしょう。

■実は、「特別な慣性系」や「特別な向き」といったモノなどはない——というハナシから、「k 系から κ 系への変換」と、「κ 系から k 系への変換」とで、関数のカタチが同じでなければいけない——というコトが、導かれます。具体的な例を見ながら、考えてみると、分かりやすいでしょう。

■たとえば、いま、関数 $\tau(t,\,x)$ が $\tau(t,\,x)=Dt+Ex^2+F$ で、関数 $t(\tau,\,\xi)$ が $t(\tau,\,\xi)=D'\tau+E'\xi+F'$ だと、仮定しましょう。つまり、「k 系から κ 系への変換」と、「κ 系から k 系への変換」で、関数のカタチが違う場合を考えてみます。すると、変換を表す関数が、位置座標（x または ξ）に対して、1 次式になるか、2 次式になるかで、自分が、k 系にいるのか、κ 系にいるのか、判断できるハズ——というコトになってしまいます。だけど、どちらが k 系で、どちらを κ 系と呼ぶのかは、人間が、勝手に決めたコトだったハズ。それならば、「やっぱり、アッチじゃなくて、コッチの系を k 系とする！」と、突然、誰かが言い出したら、その瞬間に、物理法則（関数のカタチ）を、変えてしまえる！？——というコトになってしまいます。人間なんかの都合で、物理法則を変えてしまえるという傲慢な思い上がりが、事実に反する、自然への冒涜なのは、明らかでしょう。

□蛇足ですけど、（1.8）式で求めた「k 系から κ 系への変換」を表す関数 $\xi(t,\,x)$ のカタチと、（2.3）式で求めた「κ 系から k 系への変換」を表す関数 $x(\tau,\,\xi)$ のカタチは、「2 つの変数を持ち、どちらの変数に関しても、1 次式で表される」という意味で、ちゃんと、関数のカタチが同じであるコトが、分かります。

□つまり、もし、関数 $\tau(t,\,x)$ が $\tau(t,\,x)=Dt+Ex^2+F$ なら、関数 $t(\tau,\,\xi)$ は $t(\tau,\,\xi)=D'\tau+E'\xi^2+F'$ というカタチでなければいけないし、もし、$\tau(t,\,x)=Dtx+E$ なら、$t(\tau,\,\xi)=D'\tau\xi+E'$ というカタチになっていなければならない——というのが、ココで考えている条件になります。

■さて、実際に、どんなカタチの関数なら、この条件が満たされるのか、調べてみましょう。関数 $\xi(t,\,x)$ と、関数 $x(\tau,\,\xi)$ については、ココまでの議論によって、$\xi(t,\,x)=At+Bx+C$、および、$x(\tau,\,\xi)=A'\tau+B'\xi+C'$ というカタチでなければいけないコトが、分かっています。あとは、関数 $\tau(t,\,x)$ のカタチが決まれば、問題は解決です。もし、仮に、関数 $\tau(t,\,x)$ が、$\tau(t,\,x)=Dt+Ex^2+F$ というカタチだとすると、ただちに、

$$\tau = \tau(t,\,x) = Dt + Ex^2 + F \quad \Longrightarrow \quad t = t(\tau,\,\xi) = \frac{1}{D}\Big\{\tau - E\big(A'\tau + B'\xi + C'\big)^2 - F\Big\} \tag{2.4}$$

となるので、条件を満たしません。仮に、関数 $\tau(t,\,x)$ が、$\tau(t,\,x)=Dtx+E$ というカタチだとすると、

$$\tau = \tau(t,\,x) = Dtx + E \quad \Longrightarrow \quad t = t(\tau,\,\xi) = \frac{\tau - E}{D\,(A'\tau + B'\xi + C')} \tag{2.5}$$

となるので、コレも、条件を満たしません。もはや、説明する必要はないかも知れませんけれど、関数 $\tau(t,\,x)$ が、$\tau(t,\,x)=Dt+Ex+F$ というカタチだとするならば、

$$\tau = \tau(t,\,x) = Dt + Ex + F \quad \Longrightarrow \quad t = t(\tau,\,\xi) = \frac{1-EA'}{D}\tau - \frac{EB'}{D}\xi - \frac{EC'+F}{D} \tag{2.6}$$

となるので、どちらも、2 つの変数に関して、同じカタチの関数になっているコトが分かります。つまり、上で与えられていた条件を満たしているコトが分かったワケです。このようにして、関数 $\tau(t,\,x)$ は、2 つの変数 t と x に関して、1 次式のカタチになっていなければならない——というコトが、説明できるのです。

■ココまでの議論で、ローレンツ変換について、すべての関数のカタチが、明らかになりました。興味深いコトに、どの関数も、その変数に関して、1 次式になっていなければならない——という結論が得られたのでした。以上のハナシをまとめると、結局、ローレンツ変換は、

$$\tau = \tau(t,\,x) = Dt + Ex + F \quad （D,\,E,\,F \text{ は } t,\,x \text{ に依らない定数}） \tag{2.7a}$$

$$\xi = \xi(t,\,x) = At + Bx + C \quad （A,\,B,\,C \text{ は } t,\,x \text{ に依らない定数}） \tag{2.7b}$$

$$\eta = \eta(y) = y + \eta_0 \quad （\eta_0 \text{ は初期条件で決まる定数}） \tag{2.7c}$$

$$\zeta = \zeta(z) = x + \zeta_0 \quad （\zeta_0 \text{ は初期条件で決まる定数}） \tag{2.7d}$$

または、

$$t = t(\tau,\ \xi) = D'\tau + E'\xi + F' \quad (D',\ E',\ F' \text{ は } \tau,\ \xi \text{ に依らない定数}) \tag{2.8a}$$

$$x = x(\tau,\ \xi) = A'\tau + B'\xi + C' \quad (A',\ B',\ C' \text{ は } \tau,\ \xi \text{ に依らない定数}) \tag{2.8b}$$

$$y = y(\eta) = \eta + y_0 \quad (y_0 \text{ は初期条件で決まる定数}) \tag{2.8c}$$

$$z = z(\zeta) = \zeta + z_0 \quad (z_0 \text{ は初期条件で決まる定数}) \tag{2.8d}$$

というカタチでなければいけない――というコトになります。ココまで分かったなら、あとは、係数 A～F、または、A'～F' の値を求めれば、ローレンツ変換は、完全に、解明されるコトになるワケです。ココから先のハナシは、ほとんどの教科書や解説などで、詳しく説明されています。したがって、ココでの直感的な説明は、コレでおしまいです。

■でも、ちょっと、待って下さい。確かに、「ローレンツ変換が 1 次式であれば、与えられた条件を満たす」というコトは、分かったかも知れません。けれど、「ローレンツ変換が 1 次式でなければ、与えられた条件を満たさない」、つまり、「ローレンツ変換は 1 次式でなければいけない」というトコロまでは、説明ができたワケではないのです。もしかしたら、想像力が足りないだけで、与えられている条件を満たす、意外な関数が、他にも、あるのかも知れません。とは言え、直感的な説明だけでは、ココまでのハナシが、限界と思われます。そこで、次節からは、いよいよ、数学的に厳密な証明を、紹介したいと思います。

■3. 厳密な証明(1) ―― 逆関数が存在する条件（逆関数定理）

■さて、前節までの説明は、あくまで、直感的に納得してもらうコトだけを目的にしていて、本来は必要のない条件などを、かなり、盛り込んでいます。ココからの証明と、前節までの説明が、ごっちゃになってしまうと、タイヘンです。そんなワケで、ココから先は、前節までのハナシを忘れてもらってから、いったん、頭を完全にリセットした上で、読んで下さいね。

■まず、時刻と位置が座標 $(t,\ x,\ y,\ z)$ で表される慣性系を k 系とします。k 系に対して $+x$ 軸の向きに速さ v で運動している慣性系を、κ 系と呼びましょう。κ 系の時刻と位置は、座標 $(\tau,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ で表すコトにします。この 2 つの慣性系（k 系と κ 系）の関係について、必要な仮定は、さしあたって、コレだけで十分です。

■知りたいのは、k 系の時刻と位置 $(t,\ x,\ y,\ z)$ に対応する、κ 系の時刻と位置 $(\tau,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ を与える法則です。多くの教科書や解説などで、詳しく説明されているとおり、この場合の変換法則は、次のような 4 つの関数、

$$\tau = \tau(t,\ x) \tag{3.1a}$$

$$\xi = \xi(t,\ x) \tag{3.1b}$$

$$\eta = \eta(y) = y + \eta_0 \quad (\eta_0 \text{ は初期条件で決まる定数}) \tag{3.1c}$$

$$\zeta = \zeta(z) = x + \zeta_0 \quad (\zeta_0 \text{ は初期条件で決まる定数}) \tag{3.1d}$$

で表されます。したがって、ココでは、上の 2 つの関数についてだけ、考えれば良いでしょう。

□変数を表す記号（左辺）と、関数を表す記号（右辺）を、同じにしたので、ちょっと、まぎらわしいかも知れません。分かりづらいならば、$\tau = f(t,\ x)$, $\xi = g(t,\ x)$, ... のように、関数を表す記号を、別の適当な記号に替えて、以下のハナシを書き直してくれても、まったく、問題はありません。

■ところで、（3.1a）～（3.1b）式に対して、その逆変換が存在するハズです。つまり、「k 系から κ 系への変換」に対して、「κ 系から k 系への変換」が存在しているハズ――というコトです。（3.1a）～（3.1b）式より、この逆変換（「κ 系から k 系への変換」）は、次のように表すコトができます。

$$t = t(\tau,\ \xi) \tag{3.2a}$$

$$x = x(\tau,\ \xi) \tag{3.2b}$$

□なお、コレは、あくまで、「変数の組 $(t,\ x)$ を、変数の組 $(\tau,\ \xi)$ に変換する関数が、存在したとする。このとき、変数の組 $(\tau,\ \xi)$ を、変数の組 $(t,\ x)$ に変換する関数が、存在すると仮定する」という、一般的な数学的命題を、述べただけです。ココには、ローレンツ変換に特有の性質（たとえば、「k 系から κ 系への変換」と、「κ 系から k 系への変換」とで、関数のカタチが同じでなければいけない――とか）は、まったく、仮定されていないし、結果的に含意されているというワケでもないコトに、注意して下さい。

■（3.1a）～（3.1b）式を、（3.2a）～（3.2b）式に代入すると、関数 $t(\tau,\ \xi)$ と関数 $x(\tau,\ \xi)$ は、

$$t = t\big(\tau(t,\ x),\ \xi(t,\ x)\big) \tag{3.3a}$$

$$x = x\big(\tau(t,\ x),\ \xi(t,\ x)\big) \tag{3.3b}$$

のように書き表せるコトが分かります。変数 t と変数 x が、お互いに独立な変数である（つまり、位置座標 x の値にかかわらずに、時刻 t は、どんな値にもなりうる）コトに注意して、（3.3a）～（3.3b）式の両辺を、変数 t、または、変数 x で偏微分すると、（多変数関数の）合成関数の偏微分の公式を用いて、

$$\frac{\partial t}{\partial t} = 1 = \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial t(\tau,\ \xi)}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial t(\tau,\ \xi)}{\partial \xi} \tag{3.4a}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial t(\tau,\ \xi)}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial t(\tau,\ \xi)}{\partial \xi} \tag{3.4b}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial x(\tau,\ \xi)}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial x(\tau,\ \xi)}{\partial \xi} \tag{3.4c}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 = \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial x(\tau,\ \xi)}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial x(\tau,\ \xi)}{\partial \xi} \tag{3.4d}$$

となります。ココで、便宜的に、新たな記号 J を導入しましょう。J を、次のように定義します。

$$J \equiv \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial x} - \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial t} \tag{3.5}$$

新たな記号 J を用いると、（3.4a）～（3.4d）式より、ただちに、

$$\begin{aligned} J\cdot\frac{\partial t(\tau,\ \xi)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial x}, & J\cdot\frac{\partial t(\tau,\ \xi)}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial x}, \\ J\cdot\frac{\partial x(\tau,\ \xi)}{\partial \tau} &= -\frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial t}, & J\cdot\frac{\partial x(\tau,\ \xi)}{\partial \xi} &= \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.6}$$

という関係式が得られます。コレは、（3.1a）～（3.1b）式に逆変換が存在するのならば、必ず、（3.6）式に示されている 4 つの関係式が、すべて成り立っていなければならない――というコトを表しています。

■いま、つねに $J = 0$ が成り立っていると、仮定してみましょう。この場合は、（3.6）式の右辺の偏微分が、すべて（4 つとも）、つねにゼロとなります。コレは、関数 $\tau(t,\ x)$ も関数 $\xi(t,\ x)$ も、変数 t にも変数 x にも依らない定数である――というコトです。でも、そんな解は、物理的に無意味です。そこで、（3.6）式の右辺の偏微分のどれか（または全部）が、つねにゼロ以外の値を持つとすると、今度は、対応する左辺の偏微分が、つねに無限大になります（（3.6）式の両辺を J で割った式を考えると、分かりやすいでしょう）。けれども、偏微分が、つねに無限大となるような解も、物理的に無意味です。それなら、ある特定の時刻と位置 $(t_{\rm sp},\ x_{\rm sp})$ のときにだけ、$J = 0$ が成り立つと仮定してみましょう（ちなみに、「sp」は、「特異点（singular point）」の頭文字です）。この場合、$J = 0$ となる時刻と位置 $(t_{\rm sp},\ x_{\rm sp})$ で、（3.6）式の 4 つの関係式は、それぞれ、「右辺の偏微分がゼロ」か、「左辺の偏微分が無限大」の、どちらかが、必ず成り立っているコトになります。たとえば、右下の関係式ならば、時刻と位置が $(t_{\rm sp},\ x_{\rm sp})$ のときに、$\partial\tau/\partial t = 0$ か $\partial x/\partial\xi = \infty$ の、どちらかは、必ず成り立っていなければなりません。前者なら、κ 系にある時計を、k 系で観測すると、時刻と位置 $(t,\ x)$ が座標 $(t_{\rm sp},\ x_{\rm sp})$ の近くにある時計ほど、進み方が遅くなり、座標 $(t_{\rm sp},\ x_{\rm sp})$ にある時計は、停止しているように見える――というコトになります。後者なら、κ 系にある同じ長さの棒を、k 系で（時刻 $t_{\rm sp}$ に）観測すると、位置 $x_{\rm sp}$ の近くにある棒ほど、長さが長くなり、位置 $x_{\rm sp}$ にある棒は、無限大の長さに見える――というコトになります。どちらにせよ、2 つの慣性系のあいだに、そのような（「普通の」時刻と位置 $(t,\ x)$ とは明確に区別できる）「特別な」時刻と位置 $(t_{\rm sp},\ x_{\rm sp})$ が存在しなければいけない――という結論は、あまりにも不自然です。よって、最初の仮定は誤りだと分かります（専門用語を使うなら、「時間と空間の一様性・等方性より、$J = 0$ となるような特異点 $(t_{\rm sp},\ x_{\rm sp})$ は、存在しえない」と表現できます）。結局、ローレンツ変換では、

$$J \neq 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial x} - \frac{\partial \tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial \xi(t,\ x)}{\partial t} \neq 0 \tag{3.7}$$

という条件が、つねに成り立っていなければならない――というコトが、分かりました。

□ちなみに、この節の内容は、数学の世界で、「逆関数定理」と呼ばれているハナシに、基づいています。逆関数定理は、数学や物理の世界だけではなく、ロボット工学の世界でも、重要な問題に関わってきます。また、（3.5）式で定義された J は、「（2 変数関数の）ヤコビ行列式」と呼ばれます。ヤコビ行列式は、高校で学ぶ内容にはありませんけど、逆関数定理だけでなく、多変数関数の微分や、変数変換・座標変換が関係する、あらゆる問題（たとえば、置換積分とか）で、とても本質的な役割を担っています。もちろん、特殊相対論や一般相対論を考える上でも、欠かせません。ぜひ、名前だけでも、覚えておいて下さいね。

□余談ですけど、ローレンツ変換に限らない、一般の変換の場合について、具体例を、考えてみましょう。まず、$\tau(t,\ x) = t\ln x$, $\xi(t,\ x) = x^t$ の場合は、τ と ξ が独立ではないので（$\xi = e^\tau$ なので）、逆変換は存在しません。計算してみると、つねに $J = 0$ です。次に、 $\tau(t,\ x) = t\cos x$, $\xi(t,\ x) = t\sin x$ の場合は、$J = t$ なので、$t = 0$ のとき、$J = 0$ です。実際、$t(\tau,\ \xi) = \pm\sqrt{\tau^2 + \xi^2}$, $x(\tau,\ \xi) = \tan^{-1}(\xi/\tau)$ となりますけれど、コレは、κ 系の座標 $(\tau,\ \xi)$ に対応する k 系の座標 $(t,\ x)$ が、1 つに定まらない――つまり、逆変換が存在しないコトを意味します（もちろん、$t \geq 0$ かつ $0 \leq x < 2\pi$ と限定するなら、この場合にも、逆変換が存在するコトになります）。最後に、$\tau(t,\ x) = t^3$, $\xi(t,\ x) = x - t$ の場合、$J = 3t^2$ となるので、$t = 0$ のとき、$J = 0$ です。でも、この場合は、$t(\tau,\ \xi) = \tau^{1/3}$, $x(\tau,\ \xi) = \xi + \tau^{1/3}$ となるので、逆変換は存在しています。以上の具体例から明らかなように、実は、「つねに $J \neq 0$ ならば、逆変換が存在する」は正しいけれど、「逆変換が存在すれば、つねに $J \neq 0$ である」は、必ずしも、正しくはありません。注意して下さいね。

■4. 厳密な証明(2) ―― 等速直線運動を等速直線運動に移す変換（アフィン変換）

■さて、ココで、また、最初の設定に戻ってみましょう。k 系に対して $+x$ 軸の向きに速さ v で運動している慣性系が、κ 系でした。そこで、いま、k 系に対して $+x$ 軸の向きに速さ u（$u \neq v$）で運動している、第 3 の慣性系を、導入してみましょう。便宜的に、この慣性系を、K 系と名づけます。もちろん、κ 系にとって K 系は、$+\xi$ 軸の向きに速さ ω で運動している慣性系――というコトになります（κ 系から見た K 系の相対速度の値がどうなるかは、いまは、まだ、分からないので、ココでは、仮に、 適当な記号 ω で表しておきました）。

■次に、K 系の任意の位置座標に静止している質点を、考えます。K 系の定義により、この質点を、k 系から見ると、$+x$ 軸の向きに速さ u で運動しているように見えるハズです。したがって、k 系から見た、この質点の運動の様子を、式で表せば、

$$x = ut + x_0 \qquad (x_0 \text{ は初期条件で決まる定数}) \tag{4.1}$$

となります。さらに、同じ質点を、κ 系から見ると、$+\xi$ 軸の向きに速さ ω で運動しているように見えるコトになります。したがって、κ 系から見た、この質点の運動の様子を、式で表せば、

$$\xi = \omega\tau + \xi_0 \qquad (\xi_0 \text{ は初期条件で決まる定数}) \tag{4.2}$$

となります。コレは、まったく同じ質点の運動を、k 系にいる観測者が見ると（4.1）式のようになり、κ 系にいる観測者が見ると（4.2）式のようになる――というコトを、意味しています。

■ところで、（4.2）式に、「k 系から κ 系への変換」（（3.1a）～（3.1b）式）を代入すると、

$$\xi(t,\ x) = \omega\tau(t,\ x) + \xi_0 \tag{4.3}$$

という関係式が得られます。この（4.3）式の両辺を、k 系の時刻 t で微分してみましょう。いま、ω と ξ_0 が、t に依らない定数であったコトに注意すると、（多変数関数の）合成関数の微分の公式より、ただちに、

$$\frac{dt}{dt}\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x} = \omega\left\{\frac{dt}{dt}\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\right\} + \frac{d\xi_0}{dt}$$

$$\text{したがって}\quad \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x} = \omega\left\{\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\right\} \tag{4.4}$$

となります。ところが、ココに出てくる dx/dt は、（4.1）式より、ただちに、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(ut + x_0\right) = u \tag{4.5}$$

であるコトが分かりますので（u, x_0 が t に依らない定数だったコトに注意）、結局、（4.4）式は、

$$\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t} + u\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x} = \omega\left\{\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t} + u\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\right\} \tag{4.6}$$

と表されます。よって、κ 系から見た K 系の相対速度 ω は、

$$\omega = \left\{\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t} + u\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\right\} \Big/ \left\{\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t} + u\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\right\} \tag{4.7}$$

と書けるコトが分かります（ちなみに、ω は有限の値を持ち、u は関数 $\tau(t,\ x)$, $\xi(t,\ x)$ と無関係に決めた定数でした。そのため、もし、（4.6）式の右辺のカッコ { } のなかがゼロになる可能性があるとしても、それは、極めて特殊な状況でしかありえません。だから、安心して、割り算を実行してしまいましょう）。

□なお、「ローレンツ変換が 1 次式であるコトの証明」には関係ありませんけど、（4.7）式は、「速度の合成則」――つまり、同じ質点の運動を、k 系にいる観測者が見たときの速さ u と、κ 系にいる観測者が見たときの速さ ω のあいだの関係を表しているコトを、覚えておくと良いでしょう。

■ココで、（4.7）式の両辺を、変数 t で偏微分すると、どうなるでしょうか。κ 系から見た K 系の相対速度 ω は、変数 t に依らない定数なので、左辺の偏微分は $\partial\omega/\partial t = 0$ となります。右辺の偏微分は、分数関数（商で表される関数）の偏微分の公式が使えます。結局、（4.7）式の両辺を、変数 t で偏微分すると、

$$0 = \left\{\left(\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t^2} + u\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t} + u\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t} + u\frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t^2} + u\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t\,\partial x}\right)\right\} \Big/ \left(\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t} + u\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\right)^2 \tag{4.8}$$

が得られます。（4.8）式より、右辺の分子が 0 になるコトが分かります。そこで、いま、（4.8）式の右辺の分子を展開して、u の次数ごとにまとめてみます。そして、コレが 0 に等しくなっている――というコトを、式で表すと、ただちに、

$$\begin{aligned} 0 = &\left\{\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t^2} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t^2}\right\} \\ &+ u\left\{\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t^2} + \frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t^2}\right\} \\ &+ u^2\left\{\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t\,\partial x}\right\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

となります。ところが、いま、k 系から見た K 系の相対速度 u は、さしあたり、どんな値でも良かったので、（4.9）式が、つねに成り立つためには、

$$\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t^2} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t^2} = 0 \tag{4.10a}$$

$$\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t^2} + \frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t^2} = 0 \tag{4.10b}$$

$$\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} = 0 \tag{4.10c}$$

のすべてが、成り立っていなければならないコトが、分かります。

■（4.10a）～（4.10c）式は、（4.7）式の両辺を、変数 t で偏微分した結果でしたけど、今度は、（4.7）式の両辺を、変数 x で偏微分したら、どうなるでしょうか。この場合も、まったく同じ要領で、

$$\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} = 0 \tag{4.11a}$$

$$\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial x^2} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial t}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial x^2} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial t\,\partial x} = 0 \tag{4.11b}$$

$$\frac{\partial\tau(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\xi(t,\ x)}{\partial x^2} - \frac{\partial\xi(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial^2\tau(t,\ x)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.11c}$$

のすべてが、成り立っていなければならないコトが、分かります。

□ココで、（4.10a）～（4.10c）式との比較がしやすいように、偏微分の順序交換を使いました。厳密に言えば、偏微分の順序交換が可能なのかは、ちゃんと、検討しなければいけません。でも、ローレンツ変換が、偏微分の順序交換ができないような、特殊な関数になるコトは考えられませんので、ココでは、詳しい説明は割愛します。気になるのでしたら、ぜひ、「ヤングの定理」を、調べてみて下さいね。

■さて、（4.10a）式、（4.10b）式、(4.11a）式から、ただちに、$\partial^2\tau(t,\,x)/\partial t^2$ について、

$$\left\{\frac{\partial\tau(t,\,x)}{\partial t}\frac{\partial\xi(t,\,x)}{\partial x}-\frac{\partial\tau(t,\,x)}{\partial x}\frac{\partial\xi(t,\,x)}{\partial t}\right\}\cdot\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial t^2}=0 \tag{4.12}$$

という関係が導かれます。ところが、第 3 節で得られた（3.7）式によって、（4.12）式の左辺のカッコ { } のなかはゼロではない――というコトが、すでに分かっています。よって、（4.12）式が成り立つためには、

$$\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial t^2}=0 \tag{4.13}$$

が成り立っていなければなりません。実は、この（4.13）式が、「関数 $\tau(t,\,x)$ は、変数 t に関して、1 次式のカタチをしていなければならない」というコトを、表しています。すなわち、（4.13）式から、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad \int\partial\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)=\int 0\cdot\partial t \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\tau}{\partial t}=C_1 \tag{4.14}$$

となり（C_1 は t に依らない積分定数）、さらに、

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=C_1 \quad\Longrightarrow\quad \int\partial\tau=\int C_1\cdot\partial t \quad\Longrightarrow\quad \tau=C_1t+C_2 \tag{4.15}$$

となるコトが分かる（$C_1,\,C_2$ は t に依らない積分定数）――というワケです。

■同じ要領で、（4.10c）式と（4.11a）式、および、（3.7）式から（偏微分の順序交換も使って）、

$$\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial x\,\partial t}=0 \tag{4.16}$$

が得られます。この（4.16）式からは、「関数 $\tau(t,\,x)$ は、変数 t に関して、1 次式のカタチをしているけど、t の係数（（4.15）式の C_1）は、変数 x を含まない」というコトが、分かります。すなわち、$\tau=(3x)t+C_2$ や、$\tau=(2x+1)t+C_2$ や、$\tau=(5e^{-x}\cos x)t+C_2$ のような関数にはならない――というコトです。コレは、次のようにして、証明できます。（4.15）式の $C_1,\,C_2$ は、t に依らない定数でしたけど、x には依存すると仮定して、$C_1=C_1(x),\,C_2=C_2(x)$ というように、関数のカタチで表してみましょう。そうすると、（4.15）式の両辺を t で偏微分して、さらに続けて、x で偏微分したときに、

$$\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial x\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big(C_1(x)t+C_2(x)\Big)\right)=\frac{\partial}{\partial x}C_1(x)\neq 0 \tag{4.17}$$

となり、（4.16）式と矛盾します。したがって、関数 $\tau(t,\,x)$ において、t の係数 C_1 は、t だけでなく、x にも依らない定数である――というコトが、証明できました。さらに、C_2 のほうは、t には依らないけれど、x を変数とする関数であったとしても、矛盾はない――というコトが、同時に分かります。結局、$\tau(t,\,x)$ は、

$$\tau(t,\,x)=C_1t+C_2(x) \tag{4.18}$$

$$\begin{cases} C_1 & :\ t\text{ にも }x\text{ にも依らない定数} \\ C_2(x) & :\ t\text{ には依らないけれど、}x\text{ には依存するかも知れない関数}\end{cases}$$

というカタチをしていなければならない――という結論が得られたのでした。

■ところで、いま、（4.18）式を得るために、（4.10a）～（4.11c）式のうちの一部しか使いませんでした。実際に（4.10a）～（4.11c）式から得られる関係式は、第 3 節で得られた（3.7）式も用いると、全部で、

$$\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\xi(t,\,x)}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\xi(t,\,x)}{\partial x^2}=0 \tag{4.19}$$

および（偏微分の順序交換も使って）、

$$\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial^2\tau(t,\,x)}{\partial x\,\partial t}=0,\qquad \frac{\partial^2\xi(t,\,x)}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial^2\xi(t,\,x)}{\partial x\,\partial t}=0 \tag{4.20}$$

となります。（4.19）式からは、関数 $\tau(t,\,x)$ は、変数 t に関してだけでなく、変数 x に関しても、1 次式のカタチをしていなければならないし、また、関数 $\xi(t,\,x)$ は、変数 t に関しても、変数 x に関しても、ともに、1 次式のカタチをしていなければならない――というコトが分かります。そして、さらに、（4.20）式から、関数 $\tau(t,\,x)$ も、関数 $\xi(t,\,x)$ も、変数 t の係数は、変数 x に依らない定数であり、変数 x の係数は、変数 t に依らない定数である――というコトが分かります。

■ココまでのハナシを総合すると、最終的に、ローレンツ変換を表す関数 $\tau(t,\,x)$ と関数 $\xi(t,\,x)$ は、

$$\tau(t,\,x)=At+Bx+C \qquad (A,\,B,\,C\text{ は }t,\,x\text{ に依らない定数}) \tag{4.21a}$$

$$\xi(t,\,x)=Dt+Ex+F \qquad (D,\,E,\,F\text{ は }t,\,x\text{ に依らない定数}) \tag{4.21b}$$

というカタチをしていなければならない――というコトが、証明できました。そんなワケで、「ローレンツ変換が 1 次関数でなければいけないコトの証明」のハナシは、以上で、おしまいです（ちなみに、以上の証明は、唯一の証明というワケではないです）。実際に、厳密に証明してみると、多くの教科書や解説などで、「変換式が 1 次式であるのは自明であるから」などのように、ヒトコトで済ませてしまっているコトのなかに、実は、深い内容が隠されている（かも知れない）――というコトに、あらためて、気づかされますね。

■さて、ローレンツ変換を表す関数 $\tau(t,\,x)$ と関数 $\xi(t,\,x)$ のカタチが、（4.21a）～（4.21b）式のようになるコトが分かったので、あとは、安心して、定数 $A\sim F$ の具体的な値を決めれば、ローレンツ変換は、完全に、解明されるコトになります。けれども、この先は、多くの教科書や解説などで、詳しく説明されていますので、それらを参考にしながら、ぜひ、自分の手で、ローレンツ変換式を、完成させて下さいね。

□ココまでで、「ローレンツ変換が 1 次関数でなければいけないコトの証明」のハナシは、とりあえず、終わったワケですけど、最後に、ちょっとした、蛇足を、いくつか……。

□ココで紹介した「厳密な証明」では、「光速度不変の原理」と、「相対性原理（k 系から κ 系への変換と、κ 系から k 系への変換は、関数のカタチが等しい）」という、ローレンツ変換だけに特有の仮定は、一切、使っていないコトに、注意して下さい。この証明で用いた仮定は、「逆関数が存在する」、「時間と空間は、一様・等方的である（特異点は存在しない）」、「ある座標系から見て、等速直線運動をしている質点は、別の座標系から見ても、等速直線運動をしている（慣性系の定義）」――以上の 3 つだけです。したがって、この 3 つの仮定を満たす座標変換は、すべて、（4.21a）～（4.21b）式のカタチ（1 次式）になります。たとえば、ガリレイ変換は、3 つの仮定を、すべて満たすので、（4.21a）～（4.21b）式のカタチになります（$A=1,\,B=0,\,C=\tau_0,\,D=-v,\,E=1,\,F=\xi_0$ とした場合が、ガリレイ変換です）。

□特殊相対論の教科書や解説などのなかには、「ローレンツ変換は、線形変換（線形写像）である」とか、「ローレンツ変換は、線形変換（線形写像）でなければいけない」とかいった説明が書かれているモノも、あるようです。でも、それは、間違いです。数学の世界では、「線形変換（線形写像）」には、厳密な定義があります。それは、次のようなモノです。

$$\text{加法性：}\quad f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2) \qquad (\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2\text{ は任意のベクトル}) \tag{4.22a}$$

$$\text{斉次性：}\quad f(k\boldsymbol{x}_1)=kf(\boldsymbol{x}_1) \qquad (k\text{ はスカラー定数}) \tag{4.22b}$$

（4.22a）式と（4.22b）式の両方を満たす関数（変換／写像）$f(\boldsymbol{x})$ を、「線形変換（線形写像）」と呼ぶ――コレが、厳密な定義となります。ローレンツ変換を表す関数 $\tau(t,\,x)$ と関数 $\xi(t,\,x)$ は、変数の組 $(t,\,x)$ を、ベクトル $\boldsymbol{x}=(t,\,x)$ とみなすコトができるので、それぞれ、関数 $\tau(\boldsymbol{x})$、関数 $\xi(\boldsymbol{x})$ と考えても良いコトが分かります。でも、（4.21a）～（4.21b）式から、すぐに分かるように、関数 $\tau(\boldsymbol{x})$ も、関数 $\xi(\boldsymbol{x})$ も、線形変換（線形写像）の 2 つの条件を、どちらとも、満たしません。したがって、ローレンツ変換を表す関数 $\tau(t,\,x)$ と関数 $\xi(t,\,x)$ は、どちらも、線形変換（線形写像）ではないのです。

□ココで、結論だけを言うと、「k 系と κ 系の位置座標の原点が一致するとき（$x=\xi=0$ となるとき）、お互いの時計の時刻を 0 に合わせる（$t=\tau=0$ とする）――という初期条件が与えられている場合だけ、ローレンツ変換は、線形変換（線形写像）になる」――というのが、正しい表現です。けれども、なぜか、この初期条件は、あまりにも当然に（ときには暗黙のうちに）、仮定されているコトが多くて、ついつい、忘れてしまいがちです。特殊相対論の勉強をするときには、ぜひ、この「ワナ」に、気をつけて下さいね。

□ちなみに、（4.21a）～（4.21b）式のようなカタチの関数（変換／写像）は、数学の世界においては、「アフィン変換（アフィン写像）」と呼ばれます。すなわち、ローレンツ変換は、アフィン変換（の一種）である――というコトになります。アフィン変換は、言うまでもなく、数学の世界において、とても重要な概念ですけれど、実は、コンピュータ・グラフィックス（CG）の世界でも、なくてはならないモノです。興味があるなら、ぜひ、アフィン変換（アフィン写像）の勉強にも、挑戦してみて下さいね。