

特殊相対論で、加速度運動。そして、ウラシマ効果 & 等価原理へ。 ——「特殊相対論では、非慣性系を扱えない」の誤解に挑み、一般相対論へ！

■藤野の先入観かも知れないけど、「特殊相対論＝慣性系の理論」「一般相対論＝非慣性系＋重力の理論」と、なんとなく認識している人は、少なくないんじゃないかな。

□藤野の認識だと、正しい表現は、「**特殊相対論＝重力を含まない古典力学の完成形**」「**一般相対論＝重力も含んだ古典力学の完成形**」という感じでしょうか。その帰結として、特殊相対論では、静止系と運動系の区別は無意味になったけれど、慣性系と非慣性系は厳密に区別されたままです（区別が必要というだけで、扱えないというワケではありません）。でも、一般相対論では、慣性系と非慣性系の区別すら必要なくなる——というのが、相対論についての、藤野の認識です。

■もちろん、特殊相対論でも非慣性系は扱えるし、最も単純な非慣性系である「等加速度系（と呼ぶべき仮想的な系）」ならば、わりと簡単に、いろいろな計算ができて、とっても興味深く面白い結果もたくさん導けます。さらに、一般相対論の深淵に触れるコトさえ、できるのです。「**特殊相対論で考える加速度運動**」のハナシを、ぜひ、少しでも多くの人に知って欲しいですし、特殊相対論の奥深さを味わい、楽しんでくれると嬉しいです。

□ほとんどの教科書や解説などでは、ココで、「計量」とか「4元運動量」とか、ワケの分からない謎概念がいっぱい出てきて、とっても難しそうです。でも、特殊相対論だけのハナシなら、そんなモノを持ち出す必要なんか、まったく、ないんですよ——というコトを、ぜひ、ココで、体感してみてくださいね♪

【目次】

- | | |
|---|--|
| 1. 慣性系から慣性系への変換
—— ローレンツ変換の復習 | 9. 「等加速度系」の定義（その1）
—— 等加速度系の空間と時間 |
| 2. それぞれの慣性系から見た質点の速度
—— 速度の合成則の導出 | 10. 「等加速度系」の定義（その2）
—— 等加速度系内に生じる矛盾 |
| 3. それぞれの慣性系から見た質点の加速度
—— 加速度の変換式の導出 | 11. 「等加速度系」の定義（その3）
—— 矛盾の解消 |
| 4. 加速度を感じている質点の運動
—— 解くべき微分方程式の導出 | 12. 「等加速度系」の世界
—— 一定の加速度を感じている質点から見た慣性系 |
| 5. 等加速度直線運動する質点（その1）
—— 慣性系から見た速さの計算 | |
| 6. 等加速度直線運動する質点（その2）
—— 慣性系から見た位置の計算 | |
| 7. 等加速度直線運動する質点の時間
—— 2つの時刻の関係 | |
| 8. 等加速度直線運動する質点から見た世界
—— ウラシマ効果の計算 | |

おまけ 1: 任意の慣性系から見た「等加速度系」

おまけ 2: 「等価原理」から一般相対論へ

■ 1. 慣性系から慣性系への変換 —— ローレンツ変換の復習

■時刻と位置が座標 (t, x, y, z) で表される慣性系を k 系とします。 k 系に対して $+x$ 軸の向きに速さ v で運動している慣性系 (τ, ξ, η, ζ) を κ 系としましょう。 k 系の任意の座標 (t, x, y, z) が与えられたとき、その座標に対応する κ 系の座標 (τ, ξ, η, ζ) を求めるための公式（座標変換）は、「**ローレンツ変換**」という名前で、良く知られています。具体的には、光速を c とすると、次の (1.1a) ~ (1.1d) 式ようになります。

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) + \tau_{i.c.} \quad (1.1a)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot (x - vt) + \xi_{i.c.} \quad (1.1b)$$

$$\eta = y + \eta_{i.c.} \quad (1.1c)$$

$$\zeta = z + \zeta_{i.c.} \quad (1.1d)$$

□ココで、 $\tau_{i.c.}, \xi_{i.c.}, \eta_{i.c.}, \zeta_{i.c.}$ は、初期条件（initial condition）で決まる定数です。ほとんどの教科書や解説などでは、2つの慣性系の位置座標の原点が重なる瞬間に、お互いの時刻をゼロに合わせる——という初期条件を（説明なしに）採用しているようです。その場合は、 $\tau_{i.c.} = \xi_{i.c.} = \eta_{i.c.} = \zeta_{i.c.} = 0$ となります。なお、座標原点や初期条件は、人間の都合で勝手に選べるコトなので、これらの定数は重要ではないです。

■もちろん、(1.1a) ~ (1.1d) 式とは逆に、 κ 系の任意の座標 (τ, ξ, η, ζ) が与えられたときに、その座標に対応する k 系の座標 (t, x, y, z) を求めるコトもできます。すなわち、(1.1a) ~ (1.1d) 式より、ただちに、

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot \left(\tau + \frac{v}{c^2} \xi \right) + t_{i.c.} \quad (1.2a)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot (\xi + v\tau) + x_{i.c.} \quad (1.2b)$$

$$y = \eta + y_{i.c.} \quad (1.2c)$$

$$z = \zeta + z_{i.c.} \quad (1.2d)$$

となるコトが分かります。 $t_{i.c.}, x_{i.c.}, y_{i.c.}, z_{i.c.}$ は、初期条件（initial condition）で決まる定数です。

□簡単な計算から、「 k 系にとって、 κ 系は $+x$ 方向に速さ v で運動している慣性系である」と同時に、「 κ 系にとって、 k 系は $+x$ 方向に速さ $-v$ で運動している慣性系である」というコトが分かります。

■以下の議論では、考える微小時間 dt のあいだ、 k 系から見た κ 系の相対速度 v は一定とみなせる——と仮定します。そして、微分の考え方を使えば、どのような曲線も、とても細かい階段状の折れ線（の極限）とみなすコトができるのと同じように、どのような加速度運動も、微小時間 dt のあいだの（それぞれ、少しずつ速度の異なる）等速度運動を、つなぎ合わせたモノ（における $dt \rightarrow 0$ の極限）である——と考えるのです。

■ 2. それぞれの慣性系から見た質点の速度 —— 速度の合成則の導出

■ココからは、簡単のために、 k 系の x 軸に沿って（すなわち、 κ 系の ξ 軸に沿って）任意の運動をする質点について考えます。この質点を「**質点 A**」と呼ぶコトにしましょう。

■ k 系から見た質点 A の速さ u は、 $u = dx/dt$ で表されますから、(1.2b) 式より（いま、考える微小時間 dt のあいだは、 k 系から見た κ 系の相対速度 v が一定とみなせたコトに注意して）、

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (\xi + v\tau) + x_{i.c.} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{d\xi}{dt} + v \frac{d\tau}{dt} \right) \quad (2.1)$$

となります。一方で、 κ 系から見た質点 A の速さ ω は、 $\omega = d\xi/d\tau$ なので、(2.1) 式の $d\xi/dt$ は、合成関数の微分の法則を用いて、

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \omega \quad (2.2)$$

のように表せます。 $d\tau/dt$ は、(1.1a) 式と $u = dx/dt$ を用いて、ただちに、

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) + \tau_{i.c.} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2} \right) \quad (2.3)$$

となるので、(2.2) 式と (2.3) 式を、(2.1) 式に代入して整理すると、

$$u = \frac{v + \omega}{1 + (v \cdot \omega / c^2)} \quad (2.4)$$

が導けます。この (2.4) 式によって、 k 系から見た質点 A の速さ u と、 κ 系から見た質点 A の速さ ω の関係が分かります。コレを、 k 系の観測者の立場から見ると、「 κ 系（の観測者）の速さ v 」と「 κ 系の観測者から見た質点 A の速さ ω 」の足し合わせ（合成）で、「 k 系の観測者から見た質点 A の速さ u 」を表したモノであると、みなすコトもできます。その意味で、(2.4) 式は、「**速度の合成則**」と呼ばれます。

□ちなみに、(2.4) 式から、「速さ v で運動している物体（系）から速さ ω で飛び出しても、（ k 系から見た）速さは、 $v + \omega$ にはならない」とか、「光速 c より小さいどんな速さを足し合わせても、光速 c より大きい速さにはならない（つまり、 $u < c$ が成り立つ）」とかいった、興味深いコトが分かると思います。



■ 3. それぞれの慣性系から見た質点の加速度 —— 加速度の変換式の導出

■ k 系から見た質点 A の速さ u を求めたので、さらに、コレを k 系の時刻 t で微分するコトにより、 k 系から見た質点 A の加速度 $du/dt (= d^2x/dt^2)$ を計算しましょう。(2.4) 式を t で微分して整理すると、ただちに(ココでも、考える微小時間 dt のあいだ、 k 系から見た κ 系の相対速度 v は一定とみなせるので)、

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v + \omega}{1 + (v \cdot \omega / c^2)} \right) = \left(1 + \frac{v \cdot \omega}{c^2} \right)^{-2} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (3.1)$$

となります。一方で、 κ 系から見た質点 A の加速度は $d\omega/d\tau (= d^2\xi/d\tau^2)$ です。 (3.1) 式の $d\omega/dt$ は、合成関数の微分の法則と (2.3) 式を用いて、

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2} \right) \cdot \frac{d\omega}{d\tau} \quad (3.2)$$

のように表せます。したがって、この (3.2) 式を、(3.1) 式に代入すると、

$$\frac{du}{dt} = \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \omega}{c^2} \right)^{-2} \cdot \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2} \right) \cdot \frac{d\omega}{d\tau} \quad (3.3)$$

となりますが、右辺に 1 つだけ残っている u に、(2.4) 式を代入して整理すると、結局、

$$\frac{du}{dt} = \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{3/2} \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \omega}{c^2} \right)^{-3} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} \quad (3.4)$$

が導けます。この (3.4) 式が、求めたかった、 k 系から見た質点 A の加速度 du/dt と、 κ 系から見た質点 A の加速度 $d\omega/d\tau$ のあいだの関係式です。

■ この関係式から、加速度運動(非慣性運動)する質点 A について、いろいろ計算するコトはできそうです。でも、いきなり、加速度系(非慣性系)全体について考えるのは、ちょっと大変そうです。そこで、以下では、まず、任意の加速度運動をする質点 A だけに注目して、詳しく考えていくコトにします。

■ もしも、質点 A が加速度運動していれば、質点 A には慣性力がはたらくはず。つまり、質点 A 自身が慣性力(加速度)を感じているならば、質点 A が慣性系に対して静止している、ないし、慣性系とともに運動しているというコトは(どのような慣性系を考へても)ありえません。当たり前と感ずるかも知れませんが、このコトを、以下では、「質点 A 自身が慣性力(加速度)を感じていれば、質点 A は慣性系にいない」とか、「質点 A 自身が慣性力(加速度)を感じていれば、質点 A は非慣性系(加速度系)にいる」とかのように表現するコトにします。その上で、**まずは、加速度運動をする質点 A について詳しく検討し、次に、質点 A のいる加速度系(非慣性系)全体について、考察を広げていく——という順序で、考えていくワケです。**

■ 4. 加速度を感じている質点の運動 —— 解くべき微分方程式の導出

■ いま、 k 系の任意の時刻 t において、時刻 $t \sim t + dt$ のあいだは、質点 A が、 κ 系の任意の位置座標に静止しているとみなせるとしましょう。このとき、 κ 系から見た質点 A の速さ ω は、 $\omega = 0$ となります。

■ また、微小時間 dt のあいだ、 k 系から見た κ 系の相対速度 v は、一定とみなせたコトを思い出しましょう。つい先ほど、質点 A が加速度運動をしていても、この微小時間 dt のあいだは、質点 A は κ 系にいる(κ 系に対して静止している)とみなせる——としたのですから、この微小時間 dt のあいだは、 k 系から見た質点 A の速さ u は、 k 系から見た κ 系の速さ v と等しい($u = v$)と考えるコトができます。

□ ただし、このあと、質点 A が加速度運動をしていく、つまり、考える κ 系(質点 A のいる慣性系)が次々と変わっていくコトを前提に計算をします。この前提では、もはや、 u は一定ではなく、時間とともに変化していく(つまり、時刻 t の関数 $u = u(t)$ となる)コトに注意しておきましょう。

■ ところで、質点 A は加速度運動をしているので、慣性力(加速度)を感じているはず。質点 A の感じる加速度は、どうなるでしょうか。いま、考える微小時間 dt のあいだは、質点 A は κ 系にいる(κ 系に対して静止している)とみなして良いというコトは、先に述べました。この微小時間 dt のあいだ、質点 A は κ 系にいるのですから、 κ 系から見た質点 A の加速度 $d\omega/d\tau$ と、質点 A から見た質点 A 自身の加速度は、同じモノだと考えて良いでしょう。つまり、**質点 A 自身が感じている加速度を α とおくと、 $\alpha = d\omega/d\tau$ となります。**

■ 以上の考察(特に、赤字で書かれたトコロ)を、(3.4) 式にあてはめると、加速度 α を感じている質点 A を、 k 系で見たときの質点 A の加速度 $du/dt (= d^2x/dt^2)$ は、

$$\frac{du}{dt} = \left\{ 1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right\}^{3/2} \cdot \alpha \quad \text{または} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \left\{ 1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right\}^{3/2} \cdot \alpha \quad (4.1)$$

となるコトが分かります。(4.1) 式の微分方程式を解けば、任意の加速度 $\alpha = \alpha(\tau)$ を感じている質点 A を、 k 系(慣性系)から見たときの、質点 A の運動の様子(つまり、質点 A の速さ u と位置 x) が計算できます。

□ ちなみに、ココまでは 1 次元の加速度運動だけを考へてきましたけど(つまり、質点 A の速度 u は、つねに x 軸に沿った向きである)、暗黙のうちに前提していましたが、3 次元の加速度運動を考へる場合は、どうなるでしょうか。

□ (1.2a) ~ (1.2d) 式で表されるローレンツ変換は、 k 系から見た κ 系の相対速度を $v = (v_x, v_y, v_z)$ 、 k 系の時刻と位置を (t, r_k) 、 κ 系の時刻と位置を (τ, r_κ) とすると、 $v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ も使って、

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(\tau + \frac{v \cdot r_\kappa}{c^2} \right) + t_{i.e.} \quad (4.2a)$$

$$r_k = r_\kappa + \left\{ -\frac{v \cdot r_\kappa}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot r_\kappa}{v^2} + \tau \right) \right\} v + r_{k.i.c.} \quad (4.2b)$$

となります。かなり複雑な式になってしまいましたね。

□ 1 次元の場合と同じ要領で、(4.1) 式に相当するような、3 次元の場合の微分方程式を得るためには、さらに、この (4.2a) 式と (4.2b) 式を、 k 系の時刻 t で 2 階微分して、2 つの慣性系から見た加速度のあいだの関係式を求めなければなりません。それだけでも、とてつもなく面倒くさいコトになりそうです。さらに、苦勞して求めた微分方程式が、ちゃんと(できれば簡単に)解けるのかどうかの保証もありません(ちなみに、もちろん、しっかりと解けます。それどころか、運動方程式について考へるときには、3 次元の加速度運動を前提にしないと、相対論的に正しい運動方程式を導くコトは、困難です)。

□ そうなると、「やっぱり、テンソル解析の勉強をしてから、出直さないとイケないのかな」、「まずは、ミンコフスキー空間を勉強して、マスターしないと、ダメなかも」などと思ってしまうのは、当然のコトかも知れません。そのコトが、「特殊相対論では、加速度運動は計算できない」とか、「特殊相対論では、非慣性系を扱えない」とかいった誤解につながっているのかも知れません。

□ でも、(4.1) 式を見てもらえば分かるように、1 次元の運動を考へる限りは、**加速度運動する質点 A の運動の様子(つまり、質点 A の速さ u と位置 x) を計算するのは、さほど難しくはありません。**そして、1 次元の加速度運動だけを考へれば十分な例は、けっこう多いです。たとえば、ウラシマ効果を考へる場合は、地球と別の星との往復——つまり 1 次元の加速度運動についてだけ考へれば良いので、テンソル解析なんかは、まったく知らなくても、高校で習う微積分だけで、十分に、いろいろな計算ができるのです。

■ さて、いろいろな $\alpha = \alpha(\tau)$ について (4.1) 式を解くのは、確かに、興味深い問題です。でも、以下では、**最も簡単な場合——すなわち、加速度 α がつねに一定の場合、つまり、質点 A 自身がつねに一定の加速度 α を感じている場合について、 k 系(慣性系)から見た質点 A の運動、および、質点 A 自身から見た質点 A の運動について、考えていきたいと思います。**

■ 5. 等加速度直線運動する質点(その 1) —— 慣性系から見た速さの計算

■ (4.1) 式を解く前に、まず、(4.1) 式の形から分かるコトを確認しておきましょう。すぐに気づくのは、質点 A 自身が加速度 α は一定だと感じていても、 k 系(特に制約はなく、どんな慣性系で考へても良いので、以下では、「(任意の)慣性系」と呼びます)から見れば、それ (du/dt) は、もはや一定ではない——というコトです。もう 1 つの興味深い事実は、(4.1) 式の右辺のカッコ部分は $3/2$ 乗されるので、カッコの内部は必ず 0 以上でなければいけないというコトです。すなわち、 $|u| \leq c$ が分かります。式の形だけでも、コレだけ興味深いコトが分かるのですから、ますます、ちゃんと解いてみたくなりますよね。

■ さて、実際に (4.1) 式で表される微分方程式を解いてみましょう。まず、(任意の)慣性系から見た質点 A の速さ u を求めます。(4.1) 式を書き換えて、両辺を積分すると、

$$\int \left\{ 1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right\}^{-3/2} \cdot du = \alpha \cdot \int dt \quad (5.1)$$

となります(いま、 α は一定と考へているコトに注意)。 $X = \{1 - (u/c)^2\}^{-1/2}$ とおくと、ただちに、

$$\int \frac{X}{\sqrt{X^2 - 1}} \cdot dX = \frac{\alpha}{c} \cdot \int dt \quad (5.2)$$

さらに、 $Y = (X^2 - 1)^{1/2}$ とおくと、ただちに、

$$\int dY = \frac{\alpha}{c} \cdot \int dt \quad (5.3)$$

(5.3) 式を解くと、

$$Y = \frac{\alpha}{c} \cdot t + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}) \quad (5.4)$$

ですので、置換積分に用いた Y と X を元に戻して、整理すると、ただちに、

$$u = \frac{\alpha t + cC_1}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + cC_1)^2}} \quad (C_1 \text{ は積分定数}) \quad (5.5)$$

となり、(任意の) 慣性系から見た質点 A の速さ $u = u(t)$ が求められました。

■ココで、(5.5) 式の積分定数 C_1 の意味を考えてみましょう。 $|\alpha t + cC_1| \ll c$ のとき、(5.5) 式は、

$$u \simeq \alpha t + cC_1 \quad (|\alpha t + cC_1| \ll c) \quad (5.6)$$

となるので、ガリレイの相対論における運動の法則 ($u = \alpha t + u_0$) との類推から、 cC_1 は初速度 u_0 に関係する量であると考えられます (もちろん、(任意の) 慣性系の時刻 $t = 0$ における、この慣性系から見た質点 A の速さ u_0 そのものとは異なるでしょうけれど)。そこで、さしあたって、新たな積分定数として、 $u_0 \equiv cC_1$ と書くことにしてみましょう。このとき、(5.5) 式は、

$$u = \frac{\alpha t + u'_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + u'_0)^2}} \quad (u'_0 \text{ は積分定数}) \quad (5.7)$$

と表せます。

■積分定数 u'_0 の具体的な値を決めておきましょう。いま、初期条件として、(任意の) 慣性系の時刻 $t = 0$ のときの、この慣性系から見た質点 A の速さを u_0 とおくと、(5.7) 式より、積分定数 u'_0 は、ただちに、

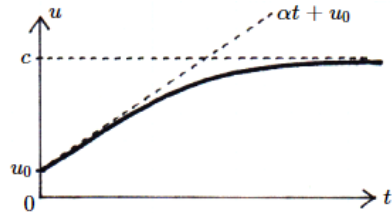
$$u'_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1 - (u_0/c)^2}} \quad (5.8)$$

となるコトが分かります。

□(5.7) 式と (5.8) 式より、 $|\alpha t + u'_0| \ll c$ (つまり、 $|u| \ll c$)、および、 $|u_0| \ll c$ のとき、 $u \simeq \alpha t + u_0$ となるコトが分かります。つまり、質点 A の速さ u が光速 c よりも十分に小さいとき、(任意の) 慣性系から見た質点 A の速さ $u(t)$ は、ガリレイの相対論で近似できるコトが分かります。

□一方で、(5.7) 式において、時刻 $t \rightarrow \infty$ の極限では、 $u \rightarrow \pm c$ となるコトも分かります (ココでの c の符号は、 α の符号と同じになります)。すなわち、(任意の) 慣性系から見た質点 A の速さ u は、有限の時間内には、光速 c に達しない——というコトになります。質点 A 自身は、つねに一定の大きさの加速度を感じて、加速し続けているのに、なんと不思議なコトですね。

■ココで得られた結果をグラフに表すと、(任意の) 慣性系の時刻 t と、この慣性系から見た質点 A の速さ u の関係は、次の図のようになります。



■6. 等加速度直線運動する質点 (その 2) —— 慣性系から見た位置の計算

■次に、(任意の) 慣性系から見た質点 A の位置 $x = x(t)$ を求めてみましょう。(5.7) 式で求めた質点 A の速さ u は、 $u = dx/dt$ でもありますから、(5.7) 式を整理して、両辺を積分すれば、

$$\int dx = \int \frac{\alpha t + u'_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + u'_0)^2}} \cdot dt \quad (6.1)$$

となります。ココで、 $X = \{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + u'_0)^2\}^{1/2}$ とおいて置換積分をすると、結局、

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + u'_0)^2} + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}) \quad (6.2)$$

が得られます。

■積分定数 C_2 の具体的な値を決めておきましょう。いま、初期条件として、(任意の) 慣性系の時刻 $t = 0$ のときの、この慣性系から見た質点 A の位置を x_0 とおくと、(6.2) 式より、積分定数 C_2 は、ただちに、

$$C_2 = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{u'_0}{c}\right)^2} = x_0 - \frac{1}{\sqrt{1 - (u_0/c)^2}} \frac{c^2}{\alpha} \quad (6.3)$$

となるコトが分かります。したがって、(6.2) 式を書き直すと、ただちに、

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + u'_0)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{u'_0}{c}\right)^2} \right\} + x_0 \quad (6.4)$$

と表せます。コレが、(任意の) 慣性系から見た質点 A の位置 $x = x(t)$ です。

□(6.4) 式からは、 $|\alpha t + u'_0| \ll c$ (つまり、 $|u| \ll c$)、および、 $|u'_0| \ll c$ のとき (このとき、 $u'_0 \simeq u_0$ と近似できるコトに注意して)、 $x \simeq (1/2)\alpha t^2 + u_0 t + x_0$ となるコトが分かります。したがって、質点 A の速さ u が光速 c よりも十分に小さいとき、(任意の) 慣性系から見た質点 A の位置 $x(t)$ は、ガリレイの相対論で近似できるコトが分かります。

■(6.4) 式を見通しの良い形にするために、ココで、積分定数として、以下のような、初期条件だけで決まる新たな定数 t_0 、および、 x'_0 を導入してみましょう。

$$t_0 \equiv -\frac{u'_0}{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (u_0/c)^2}} \frac{u_0}{\alpha} \quad (6.5a)$$

$$x'_0 \equiv x_0 - \frac{c^2}{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{u'_0}{c}\right)^2} = x_0 - \frac{1}{\sqrt{1 - (u_0/c)^2}} \frac{c^2}{\alpha} = x_0 - \frac{c^2}{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t_0}{c}\right)^2} \quad (6.5b)$$

□ちなみに、ココで新たに導入された定数 t_0 を、(5.7) 式に代入すると、この t_0 は、(任意の) 慣性系から見た質点 A の速さ u が、 $u = 0$ となる時刻を表しているコトが分かります。つまり、 $u(t_0) = 0$ です。

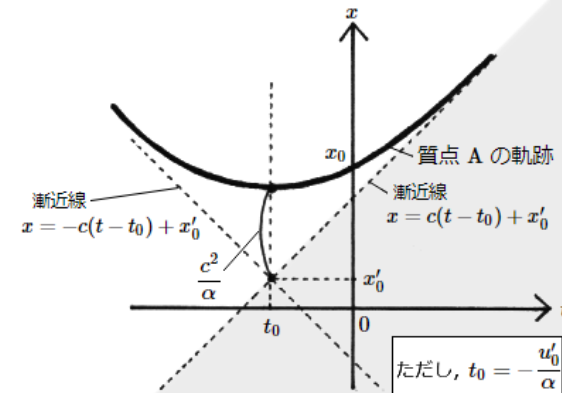
■(6.5a) ~ (6.5b) 式を用いて、(6.4) 式を書き直すと、ただちに、

$$(x - x'_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = \left(\frac{c^2}{\alpha}\right)^2 \quad \text{または} \quad \frac{(x - x'_0)^2}{(c^2/\alpha)^2} - \frac{(t - t_0)^2}{(c/\alpha)^2} = 1 \quad (6.6)$$

となります。実は、この関数の形は、幾何学の分野では良く知られています。一般に、 a と b を定数として、

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (6.7)$$

で表される関数は、 X - Y 平面上で、 $(X, Y) = (\pm a, 0)$ の点を通り、直線 $X = \pm(a/b)Y$ を漸近線とする双曲線となります。(6.6) 式と (6.7) 式を見比べるコトで、(6.6) 式のグラフは——つまり、(任意の) 慣性系の時刻 t と、この慣性系から見た質点 A の位置 x の関係は、次の図のようになるコトが分かります。



□ちなみに、漸近線の傾きが c 、つまり光速 c と等しいコトは (良く考えたら、第 5 節で明らかになったコト、すなわち、時刻 $t \rightarrow \infty$ の極限で、 $u \rightarrow \pm c$ となるコトから、当然と言えば当然ですけど)、注目に値すると思います。たとえば、漸近線よりも下側の領域 (グレーの部分) の点からは、いかなる光も、情報も、一定の加速度 α を感じている質点 A には届かないコトが分かります。つまり、この図のグレーの領域は、質点 A にとって、存在を確認するコトができない領域であり、そこでナニが起きてても、まったく影響を受けない領域——あとで明らかになるように、無限に遠い場所よりも、向こう側の場所——、要するに、存在しないも同然の領域であるコトが分かります。

■7. 等加速度直線運動する質点の時間 — 2つの時刻の関係

■さて、ココまでは、(任意の)慣性系から見た質点Aの運動の様子について考えてきましたが、一定の加速度 α を感じている質点A自身には、世界がどのように見えているのでしょうか。まず、「質点A(が持つ時計)の時刻 τ 」を、「(任意の)慣性系の時刻 t 」と比べてみましょう。

■そのために、もう一度、 k 系と κ 系から見た質点Aのハナシに戻りましょう。第4節では、微小時間 dt のあいだは、質点Aは κ 系に対して静止しているとみなしました。このとき、 k 系から見た質点Aの速さ u は $u=v$ となり、 κ 系から見た質点Aの速さ ω は $\omega=0$ (つまり、 $d\xi/d\tau=0$)となるのです。

■そのコトを踏まえて、(1.2a)式の両辺を τ で微分すると、 κ 系の時刻 τ と、 k 系の時刻 t の関係は、

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot \left(1 + \frac{u}{c^2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau}\right) \quad (7.1)$$

で表されます。ところが、いま、質点Aは κ 系に対して静止しているとみなしているのです、 $d\xi/d\tau=0$ です。さらに、 u は(5.7)式で求めていますので、それらを代入して整理すると、解くべき微分方程式は、

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + u'_0)^2} \quad (7.2)$$

となるコトが分かります。早速、この微分方程式を解いてみましょう。まず、(7.2)式より、ただちに、

$$\int d\tau = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}(\alpha t + u'_0)^2}} \cdot dt \quad (7.3)$$

ですから、 $X = (\alpha t + u'_0)/c$ とおいて置換積分をすると、結局(双曲線関数、および、その逆関数を用いて)、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{c}\tau + C_3 &= \sinh^{-1}\left(\frac{1}{c}(\alpha t + u'_0)\right) \quad (C_3 \text{ は積分定数}) \\ \text{したがって } t &= \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + C_3\right) - \frac{u'_0}{\alpha} \quad (C_3 \text{ は積分定数}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

が得られます(双曲線関数のコトは、定義や、最低限の公式などを、『[双曲線関数 — 便利な公式一覧](#)』に、まとめていますので、参考にしてくださいね)。

■ココで、積分定数の意味を考えやすくするために、新たな積分定数として、 $\tau_0 \equiv -cC_3/\alpha$ とおきましょう。また、(6.5a)式で導入した初期条件だけで決まる定数 $t_0 = -u'_0/\alpha$ も用いると、(7.4)式は、

$$t = \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \tau_0)\right) + t_0 \quad (\tau_0 \text{ は積分定数}) \quad (7.5)$$

と表すコトができます。

□(7.5)式に、 $t=t_0$ を代入すると、 $\tau=\tau_0$ となるコトが分かります。つまり、ココで導入した初期条件だけで決まる定数 τ_0 は、(任意の)慣性系の時刻 t が $t=t_0$ となるとき、質点A(が持つ時計)の時刻を表している——というコトが分かります。一方、繰り返しになりますけど、 $t_0 = -u'_0/\alpha$ は、(任意の)慣性系から見た質点Aの速さ u が $u=0$ となるような時刻、つまり、 $u(t_0)=0$ が成り立つような時刻 t_0 を表していました。ココで、相対性の原理より、(任意の)慣性系から見た質点Aの速さが u のときに、質点Aから見たこの慣性系の速さは $-u$ となるコトを、思い出しましょう。(任意の)慣性系の時刻 t が $t=t_0$ のとき、この慣性系から見た質点Aの速さ $u(t_0)$ は $u(t_0)=0$ でしたので、**質点A(が持つ時計)の時刻 τ が $\tau=\tau_0$ のとき、質点Aから見たこの慣性系の速さも0となるコトが分かります。**

■さて、(7.5)式からは、(任意の)慣性系での1秒は、一定の加速度 α を感じている質点Aにとっては、もはや1秒ではないというコトが分かります。すなわち、(7.5)式を微分すると、

$$dt = \cosh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \tau_0)\right) \cdot d\tau \quad (7.6)$$

となりますけど、 $\cosh X$ は、どんな X に対しても必ず1以上(つまり、 $\cosh X \geq 1$)ですので、

$$|dt| \geq |d\tau| \quad (7.7)$$

が必ず成り立つコトになるのです。つまり、(任意の)慣性系の時計で1秒が経過したとき($dt=1$ [秒])、一定の加速度 α を感じている質点Aが持つ時計では1秒未満しか経過していない($d\tau \leq 1$ [秒])——というコトになります。言い換えるならば、**一定の加速度 α を感じている質点Aが持つ時計は、(任意の)慣性系の時計よりも、必ず、時間の進み方が遅くなる**——というコトです。

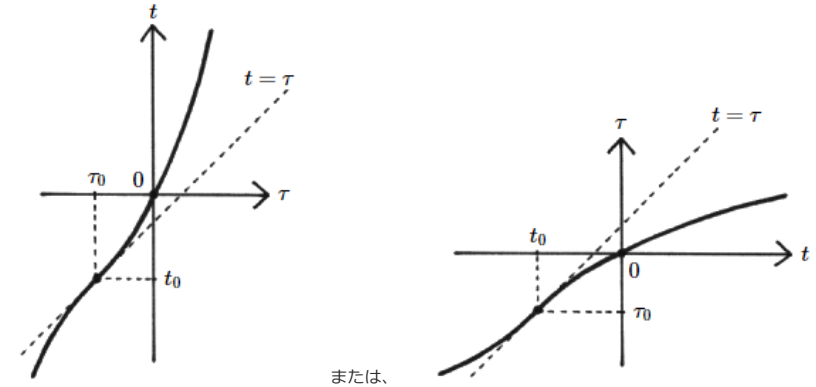
□なお、現実問題としては、たとえば、(任意の)慣性系の時刻 t が $t=0$ のとき、質点A(が持つ時計)の時刻 τ も $\tau=0$ に合わせる——というように、お互いの時刻を、適切な基準で、合わせておかないと、計算が大変です。時刻を合わせる基準は、解きたい問題の具体的な内容によって、いろいろ考えられると思いますが、イチバン分かりやすい設定は、 $t=0$ のときに $\tau=0$ となるよう、お互いの時刻の基準を合わせるコトでしょう。このとき、(7.5)式に出てくる2つの定数、 t_0 と τ_0 の関係は、

$$t_0 = \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau_0\right) = -\frac{c}{\alpha} \frac{u_0/c}{\sqrt{1-(u_0/c)^2}} = -\frac{1}{\alpha} \frac{u_0}{\sqrt{1-(u_0/c)^2}} \quad (7.8a)$$

$$\tau_0 = \frac{c}{\alpha} \sinh^{-1}\left(\frac{\alpha}{c}t_0\right) = -\frac{c}{\alpha} \sinh^{-1}\left(\frac{u_0/c}{\sqrt{1-(u_0/c)^2}}\right) = -\frac{c}{2\alpha} \ln \frac{1+(u_0/c)}{1-(u_0/c)} \quad (7.8b)$$

で表されるコトになります。

■最後に、一定の加速度 α を感じている質点A(が持つ時計)の時刻 τ と、(任意の)慣性系の時刻 t の関係をグラフにすると、(時刻の基準を、 $t=0 \leftrightarrow \tau=0$ に合わせた場合には)次の図のようになります。



■8. 等加速度直線運動する質点から見た世界 — ウラシマ効果の計算

■さて、ココまでの議論で、(7.5)式によって、(任意の)慣性系の時刻 t を、一定の加速度 α を感じている質点A(が持つ時計)の時刻 τ を用いて表すコトができました。そこで、(任意の)慣性系から見た質点Aの速さ u と時刻 t の関係を表す(5.7)式と、位置 x と時刻 t の関係を表す(6.4)式に、それぞれ、(7.5)式を代入してみます。コレで、(任意の)慣性系から見た質点Aの速さ u や位置 x が、質点A(が持つ時計)の時刻 τ を用いて表せるコトになります。

■早速、代入してみましょう。双曲線関数の公式 $\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1$ などを用いて、整理すると、

$$u = c \cdot \tanh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \tau_0)\right) \quad (8.1)$$

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \left\{ \cosh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \tau_0)\right) - \frac{1}{\sqrt{1-(u_0/c)^2}} \right\} + x_0 \quad (8.2a)$$

が導かれます。コレによって、質点A(が持つ時計)の時刻が τ のときに、(任意の)慣性系から見た質点Aの速さ $u(\tau)$ と位置 $x(\tau)$ が、どのようになっているのか、分かりました。

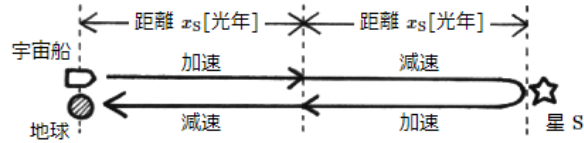
□ココまでに導いた式から、たとえば、(任意の)慣性系から見て距離 Δx だけ離れた2点のあいだを、質点Aが通過するのに要する時間を調べるときに、(任意の)慣性系の時刻 t で測った場合=(6.4)式と、質点A(が持つ時計)の時刻 τ で測った場合=(8.2a)式で、どれだけ差が生じるのか——いわゆる「ウラシマ効果」によって、どのくらい、時間の遅れが生じるのか——といったコトが、計算できます。

□ちなみに、(任意の)慣性系の時刻 t と、質点A(が持つ時計)の時刻 τ については、 $t=0$ のときに、 $\tau=0$ となるように、お互いの時刻の基準を合わせておくと、(8.2a)式を、比較的、キレイなカタチで、表せます。(7.8b)式と、双曲線関数の公式 $\sinh^{-1} X = \cosh^{-1}(\sqrt{X^2+1})$ 、および、 $\cosh(-X) = \cosh X$ を用いると、

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \left\{ \cosh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \tau_0)\right) - \cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau_0\right) \right\} + x_0 \quad (t=0 \leftrightarrow \tau=0 \text{ のとき}) \quad (8.2b)$$

のように、{ }のなかを、双曲線関数だけで表せるのです(実用的な利点は、特にないですけど……)。

■さて、実際に、具体的な設定で、「ウラシマ効果」について、計算をしてみましょう。基本的には、ここまで考えてきた「質点 A」を、「宇宙船」に置き換えて、計算すれば良いだけです。ココでは、次の図のように、地球から $2x_S$ [光年] だけ離れた星 S まで、宇宙船で往復するコトを、考えてみましょう。



■地球と星 S は、お互いに静止しており、同じ慣性系にいとみなします (この慣性系を、「地球-星 S 系」と呼ぶコトにします)。さて、宇宙船が地球を出発する瞬間、地球-星 S 系の時刻 t と、宇宙船の時刻 τ を、 $t = \tau = 0$ に合わせます。宇宙船は、初速度 $u_0 = 0$ で地球を出発し、星 S までの道中の半分 (距離 x_S [光年]) までは、一定の加速度 α で加速し、残りの半分 (距離 x_S [光年]) は、一定の加速度 $-\alpha$ で減速して、星 S に到着します。帰るも、同じ要領で、地球まで戻るとしましょう。

■計算は、「往路の加速区間」「往路の減速区間」「復路の加速区間」「復路の減速区間」と、4 つの区間に分けて行くと、簡単です。まずは、「往路の加速区間」を考えましょう。(5.8) 式、(6.5a) 式、(7.8b) 式により、 $u'_0 = t_0 = \tau_0 = 0$ が分かります。よって、(6.4) 式、(8.2a) 式、(5.7) 式などにより、宇宙船が、地球と星 S の中間点に到達したとき (つまり、宇宙船が、距離 x_S [光年] だけ進んだとき)、地球-星 S 系の時刻 $t_{\text{中間点}}$ 、宇宙船の時刻 $\tau_{\text{中間点}}$ 、および、地球-星 S 系から見た宇宙船の速さ $u_{\text{中間点}}$ が、求められます。実際に、双曲線関数の公式 $\tanh(\cosh^{-1}X) = (\sqrt{X^2 - 1})/X$ などを用いて、整理すると、

$$t_{\text{中間点}} = \frac{c}{\alpha} \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha}{c^2} x_S + 1\right)^2 - 1} \quad (8.3a)$$

$$\tau_{\text{中間点}} = \frac{c}{\alpha} \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\alpha}{c^2} x_S + 1\right) \quad (8.3b)$$

$$u_{\text{中間点}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\left\{\left(\frac{\alpha}{c^2} x_S + 1\right)\right\}^2}} \quad (8.3c)$$

■同様に、「往路の減速区間」についても、計算しましょう。宇宙船が、中間点を通過した瞬間 (「往路の減速区間」のスタート時) に、あらためて、地球-星 S 系の時刻 t と、宇宙船の時刻 τ を、 $t = \tau = 0$ に合わせ直しておくと、計算がラクになります。すると、宇宙船が、星 S に到着したときに、地球-星 S 系の時刻 t_S 、宇宙船の時刻 τ_S 、および、地球-星 S 系から見た宇宙船の速さ u_S が、それぞれ、求められます。結果だけを示すと (この場合、 $u_0 = u_{\text{中間点}} \neq 0$ なので、計算は、ちょっと面倒になりますけど)、

$$t_S = \frac{c}{\alpha} \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha}{c^2} x_S + 1\right)^2 - 1} \quad (8.4a)$$

$$\tau_S = \frac{c}{\alpha} \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\alpha}{c^2} x_S + 1\right) \quad (8.4b)$$

$$u_S = 0 \quad (8.4c)$$

■つまり、地球-星 S 系の時計で測っても、宇宙船の時計で測っても、地球から中間点までに要する時間と、中間点から星 S までに要する時間は、等しくなります。なおかつ、宇宙船の速さは、中間点で最も速くなり、星 S に到着する瞬間に、ちょうど 0 となるコトも、分かります。復路の計算についても、コレらと、まったく同じ結果が得られますので、ぜひ、自分で計算してみてくださいね。



■実際の状況で、計算してみましょう。たとえば、星 S を、地球から 4.2 [光年] 離れた、ケンタウルス座 α 星とします (地球からケンタウルス座 α 星までの距離は、資料によって 4.1 ~ 4.3 [光年] と幅がありますが、ココでは、さしあたって、4.2 [光年] として計算してみます)。この場合には、 $x_S = 2.1$ [光年] です。宇宙船の加速度 α は、地球の重力加速度と同じとしましょう。つまり、 $\alpha = 9.8$ [m/s^2] です。単位の換算については、通常なら、時間の単位を [年]、距離の単位を [光年]、速さの単位を [光年/年] で統一するコトで、光速 c が、 $c = 1$ [光年/年] となるので、計算がとてまラクになります。この場合、すべての速さは、「光の速さの〇倍」で表されます。加速度の単位だけが、少し面倒に感じるかも知れませんが、SI 単位系で定義された光速の数値部分を $c_{\text{SI}} = 299\,792\,458$ (無次元数)、国際天文学連合が定義しているユリウス年 (1 [年] = 365.25 [日]) を SI 単位系で表したときの数値部分を $a_J = 31\,557\,600$ (無次元数) というふうに、新たな記号を導入すれば、 1 [m/s^2] = a_J/c_{SI} [光年/年²] (≈ 0.105 [光年/年²]) と書けるコトを知っておくと、なにかと便利です。さて、実際に、以上の設定で計算をしてみると、宇宙船が、地球とケンタウルス座 α 星のあいだを往復して、地球に戻ってきたときに、地球の時計では 11.649 [年] が経過しているのに対して、宇宙船の時計では 7.056 [年] しか経過していない——というコトが分かります。なお、宇宙船が最も速くなるのは、地球とケンタウルス座 α 星の中間点で、そのときの速さは、光速の 0.949 倍、つまり、光速の 94.9% の速さになります。

□ところで、公式を用いて、実際の数値を求めるときに、注意しなければならないコトがあります。最初の公式を使って出した数値を、適当に四捨五入して、次の公式に代入して、……といったふうに、公式に代入するたびに、端数処理した数値を用いると、双曲線関数などの影響で、計算結果に、想像以上の大きな誤差が生じてしまう場合があります。できるだけ、計算途中で四捨五入などをする必要のない準備をしてから、与えられた数値を代入するようにしましょう。



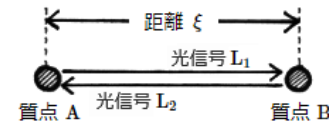
■9. 「等加速度系」の定義 (その 1) —— 等加速度系の空間と時間

■さて、ココまでの議論で、「一定の加速度 α を感じている質点 A」については、十分な検討ができました。一般相対論を使わなくたって、特殊相対論だけで、非慣性運動 (特に、等加速度運動) を扱えるというコトは、十分に確かめられました。そして、「非慣性系 (特に、等加速度系)」について考える準備が、整いました。

■そこで、いよいよ、一定の加速度 α を感じている質点 A のいる系——すなわち、「等加速度系」について、考えてみましょう。この質点 A 自身が、「質点 A のいる等加速度系」にいるコトは間違いありません。でも、質点 A がいる場所以外の空間については、ナニをもって、「質点 A と同じ等加速度系にいる」と、判断すれば良いのでしょうか。それを判断するには、**まず、最初に、「質点 A のいる等加速度系」の「時間」と「空間」を、定義しなければなりません。**

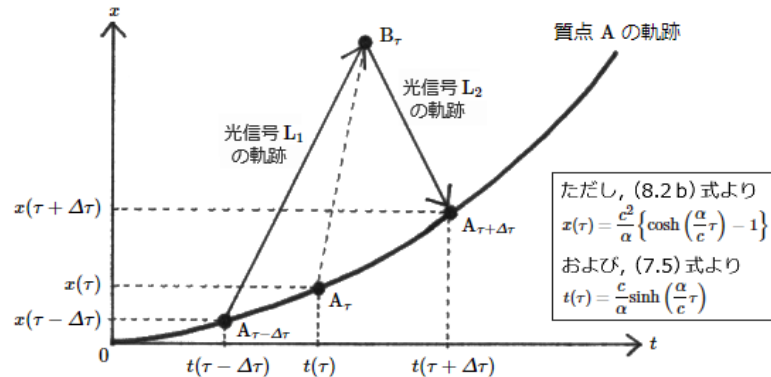
■「質点 A のいる等加速度系」の「時間」と「空間」を定義するために、下図に示すような「思考実験」を、考えてみましょう。基本的な考え方は、「慣性系」の「時間」と「空間」を定義したのと、ほとんど同じです。まずは、質点 A に対して静止している質点 B ——すなわち、質点 A から見て、質点 A から常に等しい距離 ξ にある質点 B ——が存在すると、**仮定**します。そして、……

- 【1】 質点 A が持つ時計で、時刻 $\tau - \Delta\tau$ のときに、質点 A から質点 B に向かって、光信号 L_1 を発信。
- 【2】 質点 A が持つ時計で、 $\Delta\tau$ だけの時間が経過するあいだに、光信号 L_1 は、 $\xi = c \cdot \Delta\tau$ だけ進み、質点 B に到着 (このとき、質点 A が持つ時計で、時刻は τ)。質点 B は、すぐに、質点 A へと光信号 L_2 を返信。
- 【3】 質点 A が持つ時計で、さらに、 $\Delta\tau$ だけの時間が経過するあいだに、光信号 L_2 は、 $-\xi = -c \cdot \Delta\tau$ だけ進み、質点 A に到着 (このとき、質点 A が持つ時計で、時刻は $\tau + \Delta\tau$)。



■もし、常に、この思考実験のとおり、光信号のやりとりが成立するならば、一定の加速度 α を感じている質点 A から見て、この質点 B は、質点 A から常に等しい距離 ξ にある——というコトが、確かめられます。言い換えるならば、この思考実験によって、「質点 A に対して静止している質点 B」を、定義できるのです。さらに、いま考えた距離 ξ は、向きも大きさも自由に決められるので、このような質点 B は、空間のあらゆる場所で、定義できるコトになります。コレは、「質点 A のいる等加速度系」の「空間」——つまり、質点 A に対して静止している点の集まり——を定義したのと、同じコトです。それならば、この質点 B について詳しく調べるコトは、「質点 A のいる等加速度系」について詳しく調べるコトと、同じコトになるはず。そんなワケで、次に、この質点 B について、詳しく検討してみましょう。

■そこで、この思考実験を、慣性系から見た場合のコトを考えます。簡単のために、慣性系の時刻 t が $t=0$ のとき、質点 A が持つ時計の時刻 τ を、 $\tau=0$ となるように、時計を合わせます。そして、 $t=0$ のときの、この慣性系から見た質点 A の位置 x_0 と速さ u_0 は、それぞれ、 $x_0 = u_0 = 0$ とします（初期条件にいろいろと制約を加えたので、他の慣性系と区別して、この慣性系を「 k_0 系」と呼ぶコトにしましょう）。ところで、任意の慣性系から見た質点 A の軌跡は、すでに分かっています（第 6 節を参照）。また、光信号は、どの慣性系から見て、一定の速さ c で進みます。したがって、いま考えている思考実験を、 k_0 系から見たとき、それぞれの軌跡は、次の図のようになるはずです。ちなみに、図中の点 A_τ は、質点 A が持つ時計の時刻が τ のときの、質点 A の t - x 座標（ k_0 系における時刻 t と位置 x を示す座標）を表し、点 B_τ は、光信号を受信・返信したときの、質点 B の t - x 座標を表しています。



■さて、この慣性系（ k_0 系）から見た光信号 L_1 の軌跡は、傾きが光速 c の直線なので、 $x = ct + b_1$ と表せるはず。さらに、光信号 L_1 の軌跡は、点 $A_{\tau-\Delta\tau}$ を通るので、 $x = ct + b_1$ に、点 $A_{\tau-\Delta\tau}$ の座標を代入するコトで、切片 b_1 が求められます。実際に計算すると、双曲線関数の公式 $\cosh X - \sinh X = e^{-X}$ を用いて、

$$\frac{c^2}{\alpha} \left\{ \cosh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \Delta\tau)\right) - 1 \right\} = c \cdot \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \Delta\tau)\right) + b_1$$

$$\text{したがって } b_1 = \frac{c^2}{\alpha} \left(e^{-\frac{\alpha}{c}(\tau - \Delta\tau)} - 1 \right) \quad (9.1)$$

となるので、結局、光信号 L_1 の軌跡の方程式は、

$$x = ct + \frac{c^2}{\alpha} \left(e^{-\frac{\alpha}{c}(\tau - \Delta\tau)} - 1 \right) \quad (9.2)$$

と表せます。同様に、光信号 L_2 の軌跡の方程式は、双曲線関数の公式 $\cosh X + \sinh X = e^X$ を用いて、

$$x = -ct + \frac{c^2}{\alpha} \left(e^{\frac{\alpha}{c}(\tau + \Delta\tau)} - 1 \right) \quad (9.3)$$

と表せるコトが分かります。

■質点 B が光信号を受信・返信したときの、質点 B の t - x 座標を表す点 B_τ は、上図から明らかなように、光信号 L_1 と光信号 L_2 の交点です。よって、(9.2) 式と (9.3) 式から、点 B_τ の t - x 座標が求められます。両式の和をとれば、点 B_τ の x 座標が求まり、差をとれば、点 B_τ の t 座標が求まります。質点 A から見た、質点 A と質点 B のあいだの距離 ξ が、 $\xi = c \cdot \Delta\tau$ だったコトも思い出して、実際に計算すると、ただちに、

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha}{c}\Delta\tau} \cdot \cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) - \frac{c^2}{\alpha} \quad (9.4a)$$

$$\text{したがって } x = \frac{c^2}{\alpha} \cdot e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) - \frac{c^2}{\alpha} \quad (9.4b)$$

$$t = \frac{c}{\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha}{c}\Delta\tau} \cdot \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \quad (9.5a)$$

$$\text{したがって } t = \frac{c}{\alpha} \cdot e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \quad (9.5b)$$

となるコトが分かります（ココで、双曲線関数の定義式 $e^X - e^{-X} = 2\sinh X$ 、および、 $e^X + e^{-X} = 2\cosh X$ を使いました）。

■(9.4b) 式と (9.5b) 式からは、質点 B を、この慣性系（ k_0 系）から見たときの軌跡について、知るコトができます。ところで、この質点 B について知るコトは、「質点 A のいる等加速度系」について知るコトと同じでした。つまり、(9.4b) 式と (9.5b) 式から、「質点 A のいる等加速度系」について、いろいろなコトが分かるはず。次の節で、この (9.4b) 式と (9.5b) 式について、詳しく検討してみましょう。

□ちなみに、(9.4b) 式と (9.5b) 式から、 ξ を消去すると、ただちに、

$$x = \frac{c}{\tanh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right)} \cdot t - \frac{c^2}{\alpha} \quad (9.6)$$

が導かれます。(9.6) 式は、 τ を定数とみなした場合、 t - x 座標における直線を表す式になっています。一方で、最初の思考実験に戻って考えてみると、(9.6) 式は、あらゆる ξ （質点 A と質点 B のあいだの距離）について、 t - x 座標上の点 B_τ が満たすべき条件である——というコトもできます。最初の思考実験において、点 B_τ は、質点 B が質点 A から光信号を受信・返信した事象を表す点でした。したがって、この事象（点 B_τ ）は、 ξ がどのような値であったとしても、質点 A から見て、時刻 τ に起きた事象です。コレらのハナシをまとめると、この (9.6) 式は、質点 A から見て、質点 A が持つ時計で時刻 τ のときに起きた事象のすべてを、慣性系（ k_0 系）の t - x 座標上に示したモノであるコトが分かります。たとえば、最初の思考実験の【2】に明記されているように、図中の点 A_τ と点 B_τ は、どちらも、質点 A が持つ時計で時刻 τ に起きた事象を表していますが、どちらの点も、ちゃんと、(9.6) 式を満たしています。

□このように、この (9.6) 式で表された直線上の点はすべて、質点 A から見て、時刻 τ に起きた事象を示しています。その意味で、(9.6) 式で表される直線を、「時刻 τ の同時刻線」と呼ぶコトがあります。なお、時刻 t の同時刻線は、(当たり前のコトですけど) t 軸に垂直で、 x 軸に平行な直線になります。

□余談ですけど、時刻 τ の同時刻線の、 t - x 座標上での傾きは、時間が経過するにしたがい、だんだんと小さくなり、時刻 $\tau \rightarrow \infty$ の極限で、傾きは、光速 c になります。また、時刻 τ の同時刻線は、時刻 τ の値にかかわらず、必ず、 t - x 座標上の点 $(0, -c^2/\alpha)$ を通ります。第 6 節で説明したように、この点は、慣性系（ k_0 系）から見た質点 A の軌跡（双曲線）に対する、2 つの漸近線の交点です。コレらが、ナニを意味しているのかは、とても不思議で、興味深いと思いますけど、いまは、先に進むコトにします。

■ 10. 「等加速度系」の定義（その 2）—— 等加速度系内に生じる矛盾

■さて、前節で求めた (9.4b) 式と (9.5b) 式を用いて、質点 B を慣性系（ k_0 系）から見たときの軌跡を、計算してみましょう。(9.4b) 式と (9.5b) 式から τ を消去して（双曲線関数の公式 $\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1$ を使うと、簡単です）、整理すると、ただちに、

$$\left(x + \frac{c^2}{\alpha} \right)^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{c^2}{\alpha} \cdot e^{(\alpha/c^2)\xi} \right)^2$$

$$\text{したがって } \left(x + \frac{c^2}{\alpha} \right)^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{c^2}{\alpha \cdot e^{-(\alpha/c^2)\xi}} \right)^2 \quad (10.1)$$

が得られます。少し、技巧的になりますけど、ココで、新たに、次の記号を、導入してみましょう。

$$x_B = \alpha \cdot e^{-(\alpha/c^2)\xi} \quad (10.2a)$$

$$x_{B0} = -\frac{c^2}{\alpha} + \frac{c^2}{\alpha_B} = \frac{c^2}{\alpha} \left(e^{(\alpha/c^2)\xi} - 1 \right) \quad (10.2b)$$

すると、(10.1) 式は、次のように、書き直すコトができます。

$$\left\{ x - \left(x_{B0} - \frac{c^2}{\alpha_B} \right) \right\}^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{c^2}{\alpha_B} \right)^2 \quad (10.3)$$

■ところで、一定の加速度 α を感じている質点を、任意の慣性系から見たときの軌跡については、第 6 節で、すでに求めました。すなわち、第 6 節の (6.6) 式で表されるような軌跡を描くのでした。そこで、いま、一定の加速度 α' を感じている質点 A' について、考えてみます。慣性系（ k_0 系）の時刻 t が $t=0$ のときの、この慣性系（ k_0 系）から見た質点 A' の位置 x_0 と速さ u_0 を、それぞれ、 $x_0 = x_{A'0}$ 、 $u_0 = 0$ とします。この場合、(6.5a) 式より、 $t_0 = 0$ となるコトが分かります。したがって、(6.6) 式に、 $x_0 = x_{A'0}$ 、および、 $u_0 = t_0 = 0$ を代入すると、この慣性系（ k_0 系）から見た、一定の加速度 α' を感じている質点 A' の軌跡は、

$$\left\{ x - \left(x_{A'0} - \frac{c^2}{\alpha'} \right) \right\}^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{c^2}{\alpha'} \right)^2 \quad (10.4)$$

と書けるコトが分かります。

■ココで、(10.3)式と(10.4)式を見比べてみると、質点Bと質点A'は、慣性系(k_0 系)から見たとき、まったく同じ軌跡を描いている——というコトに、気がつきます。これは、この2つの質点が、まったく同じ運動をしている——というコトです。(10.3)式と(10.4)式を見比べると、質点A'の感じている加速度 α' は、 α_B と対応していて、慣性系(k_0 系)から見た質点A'の初期位置 $x_{A'0}$ は、 x_{B0} と対応している——というコトが、分かります。すなわち、質点Bは、一定の加速度 $\alpha' = \alpha_B$ を感じていて、慣性系(k_0 系)の時刻 t が $t=0$ のときの、この慣性系(k_0 系)から見た位置 x_0 と速さ u_0 が、それぞれ、 $x_0 = x_{A'0} = x_{B0}$ と $u_0 = 0$ で、表される——というコトになるワケです。

■でも、ちょっと待って下さい。一定の加速度 α を感じている質点Aに対して常に等しい距離 ξ にある質点Bについて、詳しく調べた結果が、その質点B自身が感じている加速度は α_B でした——というのは、どういふコトなのでしょう。 (10.2a)式によれば、質点Aと質点Bが同じ場所にいる場合($\xi = 0$ の場合)以外、必ず、 $\alpha_B \neq \alpha$ なのです。もしも、コレが、ホントなら、質点Bは、質点Aに対して静止しているハズなのに(言い換えれば、質点Bは、「質点Aのいる等加速度系」にいるハズなのに)、その質点B自身は、質点Aの感じている加速度 α とは異なる、加速度 α_B を感じている——というコトになってしまいます。そのような摩訶不思議なコトが、ありえるのでしょうか。ありえるのだとしても、そんなコトで、「質点Aと質点Bは、同じ等加速度系にいる」と、言えるのでしょうか。もしかしたら、矛盾なく、合理的に、「等加速度系」を定義するコトは、不可能なのでしょう。

□「等加速度系」の矛盾について考えてみる前に、質点B自身が感じている加速度 α_B について、詳しく見てみましょう。質点B自身が感じている加速度 α_B は、(10.2a)式で与えられています。(10.2a)式の形からは、質点Bが質点Aの前方にあるとき($\xi > 0$)、質点Bの感じている加速度 α_B は、質点Aの感じている加速度 α よりも小さくなり($\alpha_B < \alpha$)、質点Bが質点Aの後方にあるとき($\xi < 0$)、質点Bの感じている加速度 α_B は、質点Aの感じている加速度 α よりも大きくなる($\alpha_B > \alpha$)——というコトが分かります。特に、質点Bが、質点Aから見て前方の無限遠点($\xi = +\infty$)にあるとき、 $\alpha_B = 0$ となり、質点Aから見て後方の無限遠点($\xi = -\infty$)にあるとき、 $\alpha_B = +\infty$ となります。

□注目すべきは、加速度だけではありません。(9.4b)式と(9.5b)式から、質点Aが持つ時計の時刻 τ の値にかかわらず、 $\xi = -\infty$ の場所で、 $t = 0$ 、 $x = -c^2/\alpha$ となるコトが分かります。これは、質点Aから見て後方の無限に遠くにある点で、この慣性系(k_0 系)にとっては $x = -c^2/\alpha$ の点であり、かつ、時間は時刻 $t = 0$ で止まっている——というコトです。第6節や第9節の最後に補った内容と併せて、コレらの結果が意味するコトは、とても興味深いんですけど、いまは、先に進むコトにします。

■ 11. 「等加速度系」の定義(その3) —— 矛盾の解消

■前節で、「質点Aのいる等加速度系」を定義したら、「質点Aと質点Bは、お互いに静止しているのに、それぞれの感じている加速度が、お互いに異なっている」という問題に直面したのでした。一見、矛盾のように感じられるかも知れませんが、実は、加速度を測る基準となる時間を、質点Aが持つ時計の時刻 τ だけで測っているコトに、この矛盾の原因があります。つまり、質点Bが持つ時計の時刻 τ_B のことも、併せて考えたら、この矛盾は、なくなってしまうのです。以下では、質点Bが持つ時計の時刻 τ_B について、調べてみましょう。

■ところで、前節の議論で、質点Bは、一定の加速度 α_B を感じていて、慣性系(k_0 系)の時刻 t が $t=0$ のとき、この慣性系(k_0 系)から見た位置 x_0 と速さ u_0 が、それぞれ、 $x_0 = x_{B0}$ 、 $u_0 = 0$ である——というコトが分かりました。一方、(7.5)式では、(任意の)慣性系の時刻 t と、一定の加速度を感じている質点Aが持つ時計の時刻 τ の関係が与えられています。この(7.5)式に、前節で求めた質点Bと慣性系(k_0 系)に関する値を代入すると、質点Bが持つ時計の時刻 τ_B と、この慣性系(k_0 系)の時刻 t の関係は、ただちに、

$$t = \frac{c}{\alpha_B} \sinh\left(\frac{\alpha_B}{c}(\tau_B - \tau_{B0})\right) \quad (\tau_{B0} \text{ は、初期条件で決まる定数}) \quad (11.1a)$$

となるコトが分かります。簡単のため、慣性系(k_0 系)の時刻 t が $t=0$ のとき、質点Bが持つ時計の時刻 τ_B を $\tau_B = 0$ に合わせるコトにしましょう。このとき、(11.1a)式より、 $\tau_{B0} = 0$ となるので、(11.1a)式は、

$$t = \frac{c}{\alpha_B} \sinh\left(\frac{\alpha_B}{c} \tau_B\right) = \frac{c}{\alpha \cdot e^{-(\alpha/c^2)\xi}} \sinh\left(\frac{\alpha \cdot e^{-(\alpha/c^2)\xi}}{c} \tau_B\right) \quad (11.1b)$$

と書き直すコトができます(ココで、(10.2a)式を用いました)。

■一方で、最初の思考実験に戻ると、慣性系(k_0 系)から見た質点Bの軌跡は、点 B_r を通ります(第9節の図を参照)。そして、一定の加速度 α を感じている質点Aから見た点 B_r の時刻 τ と、慣性系(k_0 系)から見た点 B_r の時刻 t の関係は、(9.5b)式で与えられています。つまり、すぐ上で求めた(11.1b)式の t と、(9.5b)式の t は、同じ時刻(慣性系(k_0 系)から見た点 B_r の時刻)を表しているのです。すなわち、

$$\frac{c}{\alpha} \cdot e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \sinh\left(\frac{\alpha}{c} \tau\right) = \frac{c}{\alpha \cdot e^{-(\alpha/c^2)\xi}} \sinh\left(\frac{\alpha \cdot e^{-(\alpha/c^2)\xi}}{c} \tau_B\right)$$

$$\text{したがって} \quad \tau_B = e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \tau \quad (11.2)$$

という関係式が成り立つコトが分かります。(11.2)式によって、質点Aが持つ時計の時刻 τ と、質点Bが持つ時計の時刻 τ_B の関係を、知るコトができました。

■ココで、さらに、(11.2)式の両辺を微分すると、

$$d\tau_B = e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot d\tau \quad (11.3)$$

が得られます。(11.3)式によって、質点Bが質点Aの前方にあるときには($\xi > 0$)、質点Bが持つ時計の時間 $d\tau_B$ は、質点Aが持つ時計の時間 $d\tau$ よりも、進み方が速くなり($d\tau_B > d\tau$)、質点Bが質点Aの後方にあるときには($\xi < 0$)、質点Bが持つ時計の時間 $d\tau_B$ は、質点Aが持つ時計の時間 $d\tau$ よりも、進み方が遅くなる($d\tau_B < d\tau$)——というコトが分かります。

■質点Aが持つ時計の時間の進み方の関係が、質点自身が感じている加速度の関係、つまり、(10.2a)式の関係と、まったく逆になっているコトは、注目に値すると思います。きっと、質点Aは、自分の前方にいる質点Bについて、次のように考えるでしょう。「質点B自身は、『自分は、質点Aが感じている加速度 α よりも、小さな加速度 α_B を感じている』と言っているみたいだ。けれども、質点Bがいる場所では、時間の進み方が速くなっている。だから、見かけ上、実際よりも、加速度を小さく感じているだけで、質点Bも、自分のいる等加速度系にいるハズだ」——言い換えると、十分な時間があれば、十分な速さまで加速されるけれど、時間の進み方が速いと、その分だけ、1秒間の長さが短くなり、速さの増加量も小さくなる(つまり、加速度が小さく感じる)というワケです。確かに、「加速度×時間」を「速さ(の増加量)」とすれば(あくまでも、計算上の仮想的な「速さ」ですけど)、質点Aの「速さ」が $\alpha \cdot d\tau$ で表されるのに対して、質点Bの「速さ」を計算すると、 $\alpha_B \cdot d\tau_B = \alpha \cdot d\tau$ となり、両者の「速さ」は一致します。したがって、質点Aと質点Bは、常に同じ「速さ」であり、同じ距離を保っている——つまり、お互いに静止している——と、考えるコトができます。

□ちなみに、質点Aから見ると、質点Aと質点Bは、常に同じ「速さ」で、同じ距離にありますけど、慣性系(k_0 系)からは、どう見えるのでしょうか。慣性系(k_0 系)から見た質点Aの位置を x 、質点Bの位置を x_B と書くと、簡単な計算で(ξ の符号にかかわらず)、

$$\frac{d}{dt}|x_B - x| > 0 \quad (t < 0, u < 0), \quad \frac{d}{dt}|x_B - x| < 0 \quad (t \geq 0, u \geq 0) \quad (11.4)$$

が得られます。つまり、慣性系(k_0 系)から見ると、質点Aと質点Bのあいだの距離は、2つの質点の速さがともに0となる時刻($t=0$)までは、時間の経過とともに、しだいに広がっていき、時刻 $t=0$ で最大($|x_B - x| = |x_{B0} - x_0|$)となったあとは、時間の経過とともに、しだいに狭くなっていきます。

■ココまで、「一定の加速度 α を感じている質点Aに対して静止している質点B」については、十分に詳しく調べるコトができました。この質点Bを知るコトは、「質点Aのいる等加速度系」を知るコトと、同じだったハズ。腑に落ちないコトはありますけど、次節で、いよいよ、「等加速度系」の世界を、堪能してみましょう。

■ 12. 「等加速度系」の世界 —— 一定の加速度を感じている質点から見た慣性系

■さて、「等加速度系」については、さまざまな考えから、さまざまな定義が考えられると思いますけれど、ココでは、これまでの議論から、次のように、「等加速度系」を、定義してみましょう。

[1] 一定の加速度 α を感じている質点Aに対して静止している点(質点B)の集まりを考えます。この点の集まりを、「(一定の加速度 α を感じている)質点Aのいる等加速度系(κ_A 系)」と呼ぶコトにします。

□すでに述べているとおり、質点B自身が感じている加速度 α_B は、質点Aの感じている加速度 α とは異なります。したがって、ココで定義した「等加速度系」を、「加速度 α の等加速度系」と呼ぶコトは、許されないでしょう。「等加速度系」と呼ぶコトさえ、ためらわれるかも知れません。とは言え、ほかに、合理的な「等加速度系」の定義を考えるのは、難しいと思われまます。そんなワケで、ココでは、「(一定の加速度 α を感じている)質点Aのいる等加速度系(κ_A 系)」と、カギカッコで書くコトにします。

[2] [1]により定義された質点Bの、質点Aから見た距離 ξ を、「質点Aのいる等加速度系(κ_A 系)」の位置座標とします(よって、質点A自身は、常に、この「等加速度系(κ_A 系)」の位置座標の原点 $\xi = 0$ にいるコトになります)。

□ところで、特に、SF作品を楽しむ人が、絶対に忘れてはならないのは、観測者が慣性系にいるにせよ、「等加速度系」にいるにせよ、「座標 x ないし座標 ξ の位置に『ある』』とは、「座標 x ないし座標 ξ の位置に『見える』』とは違う——というコトです。「見える」というコトを考えるには、「対象が座標上のどの位置にあるのか」という問題だけでなく、「対象から出た光が、観測者の網膜に到達するまでの経路がどうなっているのか」という問題が、とても重要になってきます。鏡のコトを考えれば、分かりやすいかも知れませんが、さらに、対象が光速に近い速さで動いていると、光速が有限であるというコトが、大きな問題となってきます。たとえ、とても長い棒を考えてみましょう。いま、棒の先端から来た光と、棒の後端から来た光が、観測者の目に「同時に」到達したとします。この場合、棒の先端から観測者までの距離と、棒の後端から観測者までの距離が同じでないとすると、観測者の目に「同時に」到達したそれぞれの光は、実際には、「異なる時刻に」対象から出た光です。それでは、棒の先端から出た時刻 $\tau_{先端}$ から、棒の後端から出た時刻 $\tau_{後端}$ のあいだに、棒の位置や姿勢が変わっていたならば、観測者が見る棒の像は、どうなるのでしょうか。観測者にとっては、時刻 $\tau_{先端}$ のときの位置に棒の先端があるように見え、時刻 $\tau_{後端}$ のときの位置に棒の後端があるように見えるハズです。したがって、たとえ、本来は真っ直ぐな棒としても、棒の位置や姿勢の変化によっては、観測者には、かなり歪んだ棒のように見えるでしょう。——その他にも、ある観測者が、ある対象を見たときの像が、どうなるかを考えるときには、光行差現象やドップラー効果などの要素が、とても重要になってきます。実際に観測者が見る像は、これらのさまざまな効果が、すべて合わさったモノになるので、かなり、ややこしいコトになるハズです。

■ココまで、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」の「空間 (位置座標 ξ)」については、定義するコトができました。次に、「等加速度系 (κ_A 系)」の「時間」を、定義しなければなりません。けれど、コレには、2 つの異なる定義が考えられます。1 つは、質点 A が持つ時計の時刻 τ を、この「等加速度系 (κ_A 系)」の時刻とする定義です。そして、もう 1 つの別の定義は、各位置座標 ξ にいる質点 B が持つ時計の時刻 τ_B を、この「等加速度系 (κ_A 系)」の時刻とする定義です。それぞれの定義の帰結を、簡単に見ていきましょう。

[3-a] 質点 A が持つ時計の時刻 τ を、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」の時刻とします。 質点 A のいる位置 ($\xi = 0$) 以外の場所の時刻は、第 9 節での思考実験に基づいて、(9.6) 式の「時刻 τ の同時刻線」によって、決められるコトになります。したがって、この「等加速度系 (κ_A 系)」で起きるあらゆる事象は、ココで定義した時刻と位置座標 (τ, ξ) によって表されるというワケです。この場合、慣性系 (k_0 系) の時刻と位置座標 (t, x) との変換公式は、(9.4b) 式と (9.5b) 式より、次のようになります。

$$t = \frac{1}{c} \left(\frac{c^2}{\alpha} \right) e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \sinh \left(\frac{\alpha}{c} \tau \right) \quad (12.1a)$$

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \left\{ e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \cosh \left(\frac{\alpha}{c} \tau \right) - 1 \right\} \quad (12.1b)$$

$$\tau = \frac{1}{c} \left(\frac{c^2}{\alpha} \right) \cdot \tanh^{-1} \left(\frac{ct}{x + (c^2/\alpha)} \right) = \frac{1}{c} \left(\frac{c^2}{\alpha} \right) \cdot \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{(x + c^2/\alpha) + ct}{(x + c^2/\alpha) - ct} \right\} \quad (12.1c)$$

$$\xi = \frac{c^2}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \ln \left\{ \left(x + \frac{c^2}{\alpha} \right)^2 - (ct)^2 \right\} + \ln \left(\frac{\alpha}{c^2} \right) \right] \quad (12.1d)$$

□第 9 節の思考実験を思い出すと、この定義は、慣性系における「時間」の定義 (離れた 2 点間における「同時性」の定義) を、「等加速度系」へと、自然に拡張したモノ——と言うコトができます。でも、この定義だと、「等加速度系 (κ_A 系)」の「時刻」と、この「等加速度系 (κ_A 系)」の任意の位置座標 ξ に付随する時計 (すなわち、質点 B が持つ時計) の「時刻」が、異なってしまう——という、とても具合の悪い状況が生じます。このコトは、たとえば、他の座標系と、「時刻」を比較するときには、致命的な問題になると思われます。一方で、たとえば、別の座標系の、任意の位置座標に固定された点を、質点 A から見たときの運動の様子 (速さ dx/dt など) を考える場合には、都合が良いのかも知れません。たとえば、加速する宇宙船 (すなわち、質点 A) から見て、地球 (すなわち、慣性系の 1 点に固定された質点) が、どのような速さで遠ざかるか / 近づくかを調べる場合には、この定義が便利かも知れません。

[3-b] 位置座標 ξ に付随する時計 (または、位置座標 ξ に固定された時計) の時刻 τ_B を、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」の位置座標 ξ における時刻とし、あらためて、 $\tau_{A,\xi}$ と書くコトにします (原点 ($\xi = 0$) にある質点 A が持つ時計の時刻 τ は、 $\tau \rightarrow \tau_{A,0}$ と書き直すコトになります)。なお、「位置座標 ξ に付随する時計」とは、「(質点 A から見て常に距離 ξ の位置にある) 質点 B が持つ時計」のコトです。この定義では、この「等加速度系 (κ_A 系)」で起きるあらゆる事象は、この時刻と位置座標 ($\tau_{A,\xi}, \xi$) で表されます。慣性系 (k_0 系) の時刻と位置座標 (t, x) との変換公式は、(10.1) 式と (11.1b) 式より、次のようになります。

$$t = \frac{1}{c} \left(\frac{c^2}{\alpha} \right) e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \sinh \left(\frac{\alpha}{c} \tau_{A,\xi} \cdot e^{(-\alpha/c^2)\xi} \right) \quad (12.2a)$$

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \left\{ e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot \cosh \left(\frac{\alpha}{c} \tau_{A,\xi} \cdot e^{(-\alpha/c^2)\xi} \right) - 1 \right\} \quad (12.2b)$$

$$\tau_{A,\xi} = \frac{1}{c} \left\{ \left(x + \frac{c^2}{\alpha} \right)^2 - (ct)^2 \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{(x + c^2/\alpha) + ct}{(x + c^2/\alpha) - ct} \right\} \quad (12.2c)$$

$$\xi = \frac{c^2}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \ln \left\{ \left(x + \frac{c^2}{\alpha} \right)^2 - (ct)^2 \right\} + \ln \left(\frac{\alpha}{c^2} \right) \right] \quad (12.2d)$$

□この定義では、この「等加速度系 (κ_A 系)」の任意の位置座標に付随する時計 (つまり、質点 B が持つ時計) の「時刻」が、位置座標 ξ の値に依存して、変わってしまいます。したがって、この「等加速度系 (κ_A 系)」の時刻を表すときには、どの位置座標の時刻を指しているのかを、明示する必要があります。そのため、「等加速度系 (κ_A 系)」の時刻を表す記号 $\tau_{A,\xi}$ には、位置座標を示す添え字が付いています。ただし、単純に τ_ξ とすると、原点 ($\xi = 0$) の時刻を表すのに、 τ_0 と書くコトになります。この τ_0 という記号は、すでに、別の意味で使っているので、少し面倒ですけど、この「等加速度系 (κ_A 系)」の時刻を表す記号は、 $\tau_{A,\xi}$ としました。

□こちらの定義では、[3-a] の定義とは逆に、別の慣性系や非慣性系と、時刻を比較するには、とても合理的と思われるけど、この「等加速度系 (κ_A 系)」全体に共通の一意的な「時間」というモノが存在しない——という、とても具合の悪い状況が生じます。

■このように、[3-a] と [3-b] の、どちらの「時間」の定義を採用するにしても、それぞれ、とても大きな問題が生じてしまいます。もともと、この「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」は、常に一定の加速度 α を感じている質点 A を考え、その質点 A に対して常に静止している質点 B ——つまり、質点 A から見て、常に等しい距離 ξ にある質点 B ——を根拠として、定義したのでした。けれど、定義に用いた、この質点 B、自身の感じている加速度 α_B の値が、そもそも α ではない ($\alpha_B \neq \alpha$) ——というコトを、思い出す必要があるのかも知れません。やはり、「等加速度系」を合理的に矛盾なく定義しようとするコトには、無理があるでしょう。どこかで、しわ寄せが出てくるのは、ある程度、仕方のないコトだと、諦めましょう。

□いっそのコト、「自分自身は、一定の加速度 α を感じている」と主張する観測者 (ないしは、質点) の集まりを、「加速度 α の等加速度系」と定義してしまえば、良いではないか——と思ってしまうね。もちろん、この考え方は、「加速度 α の等加速度系」の「空間」を、どう定義するのか——という問題が生じるでしょう。さらに、「時間」を、どう定義すれば良いのかも、簡単には解決できません。思考実験としては、とてもオモシロいと思いますが、またの機会に考えるコトにしましょう。

■なお、どちらの定義を採用するにしても、「 $X^{1/2}$ や $\ln X$ において、必ず、 $X \geq 0$ 」、「 $\tanh^{-1} X$ において、必ず、 $-1 \leq X \leq 1$ 」、……などであるコトに注意すると、それぞれの変換公式から、ただちに、

$$x \geq ct - \frac{c^2}{\alpha} \quad \text{かつ} \quad x \geq -ct - \frac{c^2}{\alpha} \quad (12.3)$$

でなければならぬというコトが分かります。この (12.3) 式は、第 6 節の図において、慣性系 (k_0 系) から見た質点 A の軌跡の 2 つの漸近線よりも、上側の領域を示しています。逆に言えば、慣性系 (k_0 系) から見た質点 A の軌跡の 2 つの漸近線よりも下側の領域は、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」にとって、無限遠 ($\xi = -\infty$) の点より、さらに向こう側の領域——つまり、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」にとって、存在しない領域 (数学的に言えば、「定義できない領域」) である——というコトを、意味しています。

□このコトについては、次のような思考実験を考えてみると、事情が、よりハッキリするでしょう。いま、慣性系 (k_0 系) の位置座標 $x = xp$ に固定されている点 P から、一定の加速度 α を感じている質点 A に向かって、一定の時間間隔 Δt で、光信号を発信し続けるとします。ただし、点 P は、質点 A の「後ろ側 (加速度 α の向きの反対側)」にあります。このとき、質点 A が、光信号を受け取る時間間隔 $\Delta \tau$ は、

$$\Delta \tau = \frac{c^2}{\alpha} \left\{ \left(x_p + \frac{c^2}{\alpha} \right) - ct_{\text{send}} \right\}^{-1} \cdot \Delta t \quad (12.4a)$$

$$\text{または} \quad \Delta \tau = e^{(\alpha/c) \tau_{\text{receive}}} \cdot \Delta t \quad (12.4b)$$

となります。ココで、 t_{send} は点 P が光信号を発信した時刻 (慣性系 (k_0 系) の時刻)、 τ_{receive} は質点 A が光信号を受信する時刻 (質点 A が持つ時計の時刻) です。両式によって、点 P は一定の時間間隔 Δt で光信号を発信していたとしても、時間が経過するにしたがって、質点 A が光信号を受信する時間間隔 $\Delta \tau$ が、どんどん大きくなっていくコトが分かります。特に、(12.4a) 式より、 t_{send} が (12.3) 式の 1 つ目の条件を満たさなくなるとき、つまり、 $t_{\text{send}} = (1/c)(x_p + c^2/\alpha)$ のとき、 $\Delta \tau = \infty$ となります。コレは、点 P からの光信号が、決して、質点 A に到達しない——というコトを意味します。すなわち、(12.3) 式の 1 つ目の条件を満たさない領域で、ナニが起きようと、質点 A がそれを知るコトも、それに影響されるコトも、未来永劫、絶対に、ありえないです。そういうワケで、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」にとって、(12.3) 式の条件を満たさないような領域は、存在しない領域である——と表現した意味が、イメージできただろうか。

□一方で、(12.4b) 式より、有限の τ_{receive} では、 $\Delta \tau$ が $\Delta \tau = \infty$ になるコトは、ありません。つまり、質点 A にとっては、点 P からの光信号が届かなくなるコトは、ありません (もちろん、ドップラー効果によって、点 P からの光信号は、時間の経過とともに、振幅はどんどん小さくなるし、波長はどんどん長くなっていきます)。ただし、質点 A に届く光信号は、あくまで、(12.3) 式の 1 つ目の条件を満たした時刻に点 P から発信された光信号だけです。質点 A から見ると、点 P が持つ時計は、進み方がどんどん遅くなっていて、最後には (質点 A が持つ時計の時刻 τ で $\tau \rightarrow \infty$ になるときは)、点 P が持つ時計の時刻が $t_{\text{send}} = (1/c)(x_p + c^2/\alpha)$ になって、停止してしまう——というように感じるでしょう。

■ココまでの考察から、慣性系 (k_0 系) の位置座標 $x = xp$ に固定されている点 P を、「(一定の加速度 α を感じている) 質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」で観測した場合にどうなるかについて、(いろいろと問題はありますが) 計算する準備ができました。2 つの異なる系の「時刻」を比較するコトになるので、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」の「時間」については、[3-b] の定義を採用するコトにしましょう。

□コレを分かりやすく言い換えると、次のようになります。まず、一定の加速度 α を感じている質点 A に対して静止している (つまり、質点 A から見て、常に等しい距離にある)、時計を持つ質点 B の集まりを考えます。その上で、慣性系 (k_0 系) に固定された任意の点 P の時刻および位置座標 (t, x) と、点 P と同じ場所にある (同じ場所に来る) 質点 B が持つ時計の時刻、および、その質点 B の位置座標 ($\tau_{A,\xi}, \xi$) の関係を、調べてみるとうなるのかを、考えてみるのです。

□つこういふですけど、このような「質点 B の集まり」は、あくまで、仮想的なモノです。宇宙船から見たときに、実際に観測される対象の位置や時刻を調べるときには、前に述べたように、対象から出た光の軌跡を考える必要があります。ココでは、あくまでも、興味深い頭の体操として、「(一定の加速度 α を感じている) 質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」とは、いったい、どういうモノなのかというコトを実感するために、とりあえず、具体例を見てみようではないですか——というワケです。

■おまけ 1： 任意の慣性系から見た「等加速度系」

■では、実際に、第 8 節の最後に取り上げた、ウラシマ効果の具体例（地球とケンタウルス座 α 星のあいだの往復）を使って、考えてみましょう。慣性系（地球-星 S 系）の位置座標 x で、地球は $x = 0$ [光年]、中間点は $x = 2.1$ [光年]、ケンタウルス座 α 星は $x = 4.2$ [光年] の位置にあるとします。宇宙船は、地球を出発して中間点までは一定の加速度 $\alpha = 9.8$ [m/s²] で加速し（「往路の加速区間」）、中間点からケンタウルス座 α 星までは一定の加速度 $\alpha = -9.8$ [m/s²] で減速して（「往路の減速区間」）、ケンタウルス座 α 星に到着すると仮定します。また、加速区間・減速区間のそれぞれで、等加速度運動をする宇宙船（質点 A にあたります）の位置を、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の位置座標の原点（ $\xi = 0$ [光年]）とします。

【1】最初に、宇宙船が地球を出発する瞬間（ $t = \tau_{\alpha,0} = 0$ [年]）には、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の位置座標 ξ で、地球は $\xi = 0$ [光年]、中間点は $\xi = 1.117$ [光年]、ケンタウルス座 α 星は $\xi = 1.623$ [光年] の位置にあります。また、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の時刻 $\tau_{\alpha,\xi}$ は、すべての場所で、 $\tau_{\alpha,\xi} = 0$ [年] です（もちろん、地球-星 S 系でも、すべての場所で、 $t = 0$ [年] です）。地球-星 S 系における「中間点」は、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」では、もはや「中間点」ではない——というコトが、分かります。さらに言えば、宇宙船の前方へと離れるほど、距離が縮んでいるのも、分かります。

【2】宇宙船が、中間点に向かって等加速度航行をしている途中、宇宙船内の時刻で $\tau_{\alpha,0} = 0.854$ [年]、慣性系（地球-星 S 系）の時刻で $t = 0.969$ [年] のとき、地球が、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の無限遠点（ $\xi = -\infty$ ）に到達します。つまり、宇宙船に対して静止している（宇宙船から見て、常に等しい距離にある）ような質点 B が存在しない/定義できない領域に、地球が到達するというコトです。このとき、地球-星 S 系から見ると、宇宙船は $x = 0.402$ [光年] の位置にあります。ちなみに、上で述べたとおり、この時刻以降も、宇宙船には、地球からの光信号が届き続けます。なんだか、ややこしいですね。

【3】宇宙船が、地球とケンタウルス座 α 星の中間点に到達したとき、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の位置座標 ξ で、中間点は $\xi = 0$ [光年]、ケンタウルス座 α 星は $\xi = 1.438$ [光年] の位置にあります。地球がある場所には、宇宙船に対して静止している（宇宙船から見て、常に等しい距離にある）ような質点 B が存在しないため、「地球は無限遠点（ $\xi = -\infty$ ）の向こう側にあります」と言うべきでしょうか。また、このとき、慣性系（地球-星 S 系）では、すべての場所で 2.912 [年] が経過していますが、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」では、中間点は 1.764 [年]、ケンタウルス座 α 星は 2.724 [年] が経過しています。地球がある場所も含めて、地球-星 S 系の位置座標 x で $x \leq 1.943$ [光年] の場所には、宇宙船に対して静止している（宇宙船から見て、常に等しい距離にある）ような質点 B が存在しないために、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」では、これらの場所の時刻を定義するコトは、できません（そもそも、存在自体を認識できません）。

【4】さて、次に、「往路の減速区間」に入りますけれど、この区間の計算には、注意が必要です。（12.2a）～（12.2d）式では、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の座標（ $\tau_{\alpha,\xi}, \xi$ ）と、慣性系（地球-星 S 系）の座標（ t, x ）の変換式を求めるときに、地球-星 S 系から見た宇宙船の速さ u が $u = 0$ となる時刻をもとに、時刻と位置座標の基準（ $t = \tau_{\alpha,\xi} = 0, x = \xi = 0$ ）を合わせていたからです。この区間の計算をするときには、その点に注意して、新たに、慣性系（地球-星 S 系）を取り直す必要があります。すると、宇宙船が中間点で減速を始めたとき、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の位置座標 ξ で、地球は $\xi = -1.438$ [光年]、中間点は $\xi = 0$ [光年] の位置にあるコトが、分かります。ケンタウルス座 α 星は、無限遠点（ $\xi = +\infty$ ）の向こう側にあります（地球-星 S 系から見て、中間点から $+x$ 方向に 0.157 [光年] だけ離れた位置より先は、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」では、無限遠点（ $\xi = +\infty$ ）の向こう側の場所になります）。「往路の加速区間」での中間点に対して、「往路の減速区間」では、加速度の大きさは変わらないけど、向きが変わっているので、地球やケンタウルス座 α 星の位置座標が、突然、変わってしまっているコトに、注意しましょう。ホントに、ややこしいですね。

【5】宇宙船が、ケンタウルス座 α 星に向かって等減速度航行を始めてから、宇宙船内の時間で 0.910 [年]、慣性系（地球-星 S 系）の時間で 1.943 [年] が経過したとき、ようやく、ケンタウルス座 α 星が、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の無限遠点（ $\xi = +\infty$ ）に到達します。宇宙船に対して静止している（宇宙船から見て、常に等しい距離にある）ような質点 B が存在する/定義できる領域に、ケンタウルス座 α 星が到達するワケです。なお、このときに、地球-星 S 系から見ると、宇宙船は、中間点から $+x$ 方向に 1.698 [光年] だけ離れた位置にあります。ちなみに、この時刻の前から、宇宙船には、ケンタウルス座 α 星からの光信号が届き続けています。とにかく、ややこしいですね。

【6】最後に、宇宙船が、ケンタウルス座 α 星に到達したときには、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」の位置座標 ξ で、地球は $\xi = -1.623$ [光年]、中間点は $\xi = -1.117$ [光年]、ケンタウルス座 α 星は $\xi = 0$ [光年] の位置にあります。そして、宇宙船が、中間点で等減速度航行を始めてから、ケンタウルス座 α 星に到達するあいだに、慣性系（地球-星 S 系）では、すべての場所で 2.912 [年] が経過していますが、「宇宙船のいる等加速度系（ κ_A 系）」では、地球は 2.724 [年]、中間点は 1.764 [年] が経過しています。ココでは、宇宙船の後方へと離れるほど、距離が縮んでいるのが分かります。

——復路については、皆さんで、計算してみてくださいね。



■第 9 節以下で、「等加速度系」の定義を考えたときには、簡単のため、一定の加速度を感じている質点を観測する「慣性系（ κ_0 系）」に対して、初期条件に関する制約を、いろいろと加えました。けれども、もちろん、ナンンの制約もない「任意の慣性系」から見た、「（一定の加速度 α を感じている）質点 A のいる等加速度系（ κ_A 系）」についても、考えるコトはできます。むしろ、実際に、SF を楽しむ場合——たとえば、第 12 節の最後で考えた、星間航行における「ウラシマ効果」の計算など、具体的な状況で、どんなコトが起きるのかを知るには、ナンンの制約もないほうが、圧倒的に便利です。そこで、「質点 A のいる等加速度系（ κ_A 系）」を観測する「慣性系」に、ナンンの制約も加えない場合、コレまでに得られた式が、どう書き換えられるのか——それを、ココで紹介しておきます。

■まず、最初に、(9.6) 式に相当する、質点 A が持つ時計の時刻 τ に対する、「時刻 τ の同時刻線」を表す方程式は、次のように書き直されます。

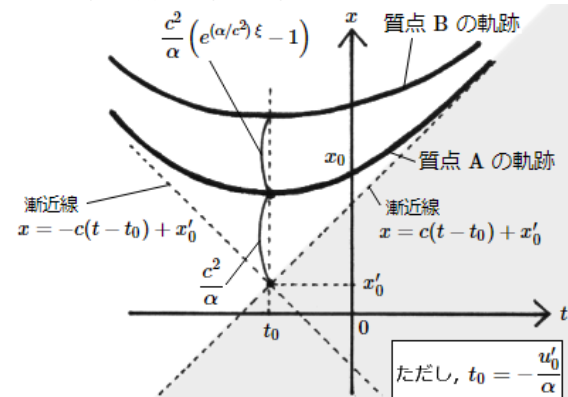
$$(x - x'_0) = \frac{c}{\tanh\left(\frac{\alpha}{c}(\tau - \tau_0)\right)}(t - t_0) \quad \text{ただし} \quad x'_0 = x_0 - \frac{1}{\sqrt{1 - (u_0/c)^2}} \frac{c^2}{\alpha} \quad (A1.1)$$

■次に、(10.3) 式に相当する、質点 A に対して常に等しい距離 ξ にある質点 B——すなわち、質点 A に対して常に静止している質点 B——の、任意の慣性系から見た軌跡の方程式、および、質点 B が持つ時計の時刻 τ_B に対する、「時刻 τ_B の同時刻線」を表す方程式は、それぞれ、

$$\text{軌跡: } (x - x'_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = \left(\frac{c^2}{\alpha B}\right)^2 \quad \text{ただし} \quad \alpha_B = \alpha \cdot e^{-(\alpha/c^2)\xi} \quad (A1.2)$$

$$\text{同時刻線: } (x - x'_0) = \frac{c}{\tanh\left(\frac{\alpha_B}{c}(\tau_B - \tau_{B0})\right)}(t - t_0) \quad (A1.3)$$

となります（なお、任意の慣性系から見て、質点 B の速さが 0 となるときの、質点 B が持つ時計の時刻を τ_{B0} とおきました）。質点 A の軌跡を表す (6.6) 式と比較するコトで、ただちに、**任意の慣性系から見て、質点 A の速さが 0 となる時刻 t_0 と、質点 B の速さが 0 となる時刻 t_{B0} は、必ず等しくなる**——つまり、 $t_0 = t_{B0}$ となるコトが分かります。さらには、**質点 A の軌跡（双曲線）の漸近線と、質点 B の軌跡（双曲線）の漸近線が、必ず同じ直線になるコトも分かります**。最終的に、任意の慣性系から見た、質点 A と質点 B の軌跡は、下の図のようになります。この図から、興味深い事実が、いろいろと、発見できると思います（たとえば、任意の慣性系から見て、質点 A と質点 B の速さが、ともに 0 になるとき（時刻 $t = t_0$ のとき）の、質点 A と質点 B のあいだの距離のコトとか）。ぜひ、じっくりと検討して、たくさん新たな発見を、楽しんで下さいね。



□第 6 節で説明したように、図のグレーの領域は、質点 A にとっても、質点 B にとっても、存在を確認するコトができない領域であり、そこでナニが起きてても、質点 A や質点 B は、まったく影響を受けない領域——無限に遠い場所よりも、さらに向こう側の場所を表しています。

■さらに、(11.1a) 式に相当する、質点 B が持つ時計の時刻 τ_B と、任意の慣性系の時刻 t のあいだの関係を表す式、および、(11.2) 式と (11.3) 式に相当する、質点 A が持つ時計の時刻 τ と、質点 B が持つ時計の時刻 τ_B のあいだの関係を表す式は、それぞれ、次のように書き直されます。

$$t - t_0 = \frac{c}{\alpha_B} \sinh\left(\frac{\alpha_B}{c}(\tau_B - \tau_{B0})\right) \quad (A1.4)$$

$$\tau_B - \tau_{B0} = e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot (\tau - \tau_0) \quad \text{したがって} \quad d\tau_B = e^{(\alpha/c^2)\xi} \cdot d\tau \quad (A1.5)$$

□ちなみに、第 11 節で触れた、「質点 A と質点 B で、質点 A から見た『速さ (の増加量)』は、常に等しくなる」というハナシは、当然、どんな場合でも成り立ちます。つまり、(A1.2) 式と (A1.5) 式から、「速さ (の増加量) = 加速度 × 時間」を計算すると、 $\alpha_B \cdot (\tau_B - \tau_{B0}) = \alpha \cdot (\tau - \tau_0)$ という関係が、常に成り立つコトが分かります。さらに、(A1.1) 式と (A1.3) 式を見比べると、「時刻 τ の同時刻線」と「時刻 τ_B の同時刻線」が、常に同じ直線になるコトも分かります。



■おまけ 2: 「等価原理」から一般相対論へ

■ココまで読み進めてくれたのなら、加速度運動や加速度系について、だいぶ理解できたと思いますし、自信もついてきたのではないのでしょうか。ところで、**一般相対論は、特殊相対論の限界に、「等価原理」というアイデアを加えたコトで、完成への第 1 歩が踏み出された**——というハナシは、とても有名です。「等価原理」は、「加速度運動に伴う慣性力と、重力は、区別がつかない」など、いろいろな言い方で、説明されているようです。ココで、「加速度運動」のコトは、すでに、かなり深く理解できているはず。つまり、**一般相対論の完成に向けた第 1 歩を踏み出す準備は、すでに、できているのです。**

□確かに、第 1 歩を踏み出す準備はできていますが、実は、「偉大なる飛躍」と言える第 1 歩を踏み出してから、一般相対論の完成にたどり着くまで、アインシュタインには、約 8 年の歳月が必要でした。道のりの途中で、とてつもなく大変な準備 (テンソル解析とかリーマン幾何学とかの勉強) をしてからでないといけない難所が、控えていたからです。

□でも、そもそも、第 1 歩を踏み出さなければ、どこにも、たどり着くコトは、絶対にありません。そして、なによりも、この第 1 歩は、新たな地平へと導く、ホントに大きな飛躍の 1 歩なのです。難所の手前まで来られれば、見える景色は、コレまでと、まったく違ったモノになるはずですよ。

■そんなワケで、ココで、一般相対論への偉大なる飛躍となる第 1 歩を、踏み出してみたいと思います。

■「局所加速度系」を考える

■第 9 節以降の議論で、**空間全体に広がる「加速度系」というモノを考えるのは、無理がある**——というコトが、ハッキリしたと思います。そこで、いまは、思い切って、空間全体に広がる「加速度系」という考えは、いったん、捨て去ってしましましょう。

■一方で、第 1 節以降の議論で、「考える微小時間 dt のあいだ、 k 系から見た κ 系の相対速度 v は一定とみなせる」、または、「どのような加速度運動も、微小時間 dt のあいだの (それぞれ、少しずつ速度の異なる) 等速度運動を、つなぎ合わせたモノ (における $dt \rightarrow 0$ の極限) である」という方針で、計算を進めていくと、とても上手くいくというコトが、分かっています。

■それなら、ココでも、とても短い時間間隔 $\Delta\tau$ 、そして、とても狭い空間 (体積 $\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta$ の空間) でのハナシに限って、考えるコトから、始めてみましょう。**十分に短い時間間隔で、かつ、十分に狭い空間に限れば、「位置座標のすべての点が、同じ加速度 α を感じている (とみなせる) 加速度系」を、考えても良いはず**です。そこで、この「加速度系」における時刻と位置 (τ, ξ, η, ζ) を、「(一様な加速度 α の) 局所加速度系」と呼ぶコトにしましょう (注: 「局所加速度系」は、藤野の造語です)。局所加速度系の時刻と位置を、どう定義するのは、とても悩ましい問題ですけど、実は、うまい解決方法があります。局所加速度系は、相対速度の少しずつ異なる慣性系を、つなぎ合わせたモノである——と考えるのです。

□以下、簡単のために、局所加速度系は、 ξ 方向だけに、加速度 α を感じているとします。つまり、局所加速度系では、位置を考えるときに問題になるのは、 ξ 方向だけで、 η 方向、 ζ 方向については、慣性系と同じになる——というコトになります。そこで、以下では、慣性系と同じになる、 η 方向と ζ 方向の位置座標は省略して、局所加速度系の時刻と位置を、座標 (τ, ξ) で表すコトにします。

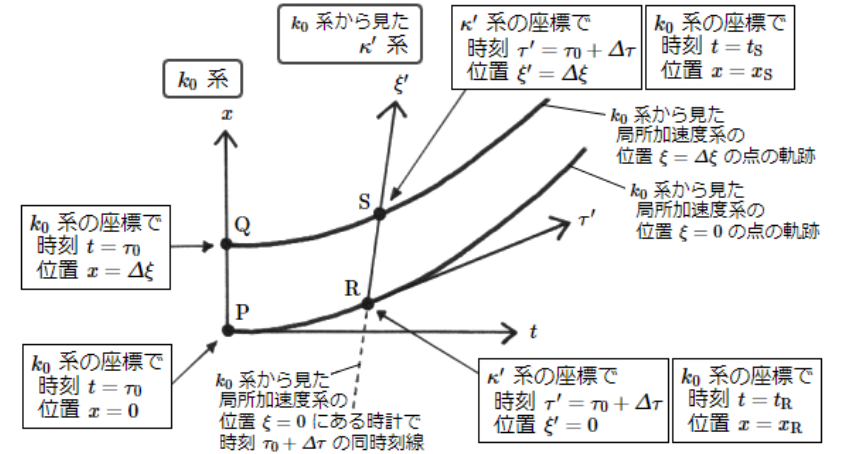
■いま、局所加速度系の (原点の) 時刻 τ が $\tau = \tau_0$ となる瞬間、この局所加速度系と完全に一致する、「ホンモノ」の慣性系を考えます。この慣性系を k_0 系と呼び、 k_0 系の時刻と位置を、座標 (t, x) で表すコトにしましょう。もちろん、局所加速度系は、実際には、加速度運動をしているので、局所加速度系と k_0 系が一致するのは、局所加速度系の時刻 τ が $\tau = \tau_0$ となる一瞬だけです。でも、たとえば、動画から静止画像をキャプチャするのと同じイメージで、局所加速度系の時刻が τ_0 となる瞬間は、この k_0 系を、局所加速度系と同じモノであるとみなすワケです。さらに、十分に短い時間間隔 (時刻 $\tau_0 \sim \tau_0 + \Delta\tau$ のあいだ)、かつ、十分に狭い空間 (位置 $0 \sim \Delta\xi$ のあいだ) に限れば、局所加速度系と、この k_0 系を、同一視するコトができるはず——と考えます。この場合には、この k_0 系について詳しく調べるコトは、局所加速度系 (の時刻と位置) について詳しく調べるコトと、同じコトになる——というワケです。

□局所加速度系の (原点の) 時刻 τ が $\tau = \tau_0$ となる瞬間は、局所加速度系と k_0 系を、まったく同じモノであるとみなしているの、この瞬間の k_0 系の時刻 t も、 $t = \tau_0$ となります。また、このとき、局所加速度系の位置 $\xi = 0$ の点は、 k_0 系でも位置 $x = 0$ の点であり、局所加速度系の位置 $\xi = \Delta\xi$ にある点は、 k_0 系にとっても位置 $x = \Delta\xi$ にある——というコトになります。

■次に、先の瞬間から、局所加速度系の (原点の) 時間で $\Delta\tau$ だけ経過したときに、この局所加速度系と完全に一致する、「ホンモノ」の慣性系を考えます。すなわち、局所加速度系の時刻 τ が $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ のときに、この局所加速度系と完全に一致する、「ホンモノ」の慣性系を考えるワケです。もちろん、この慣性系は、先ほどの k_0 系とは別モノになります (局所加速度系は、加速度運動しているのですから)。そこで、この新たな慣性系を、 κ' 系と呼び、 κ' 系の時刻と位置を、座標 (τ', ξ') で表すコトにします。

□先ほどと同様に、局所加速度系の (原点の) 時刻 τ が $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ となる瞬間は、局所加速度系と κ' 系を、まったく同じモノであるとみなすので、この瞬間の κ' 系の時刻 τ' も、 $\tau' = \tau_0 + \Delta\tau$ です。また、このとき、局所加速度系の位置 $\xi = 0$ の点は、 κ' 系でも位置 $\xi' = 0$ の点であり、局所加速度系の位置 $\xi = \Delta\xi$ にある点は、 κ' 系にとっても位置 $\xi' = \Delta\xi$ にあります。

■ココで新たに導入した k_0 系と κ' 系の関係を、分かりやすく表したモノが、次の図です。この図には、 k_0 系から見た局所加速度系の位置 $\xi = 0$ の点の軌跡と、位置 $\xi = \Delta\xi$ の点の軌跡も、一緒に示しています (もちろん、 κ' 系から見た局所加速度系の点の軌跡は、コレらとは違ったモノになっています)。 k_0 系から見た κ' 系の座標軸が、どうして、傾いているのかは、多くの教科書や解説などで、説明されています。気になる人は、ぜひ、「時空図」について、調べてみて下さいね。



■ところで、第 9 節でも触れましたけれど、局所加速度系の位置座標の原点 ($\xi = 0$ の点) については、**そもそも、時刻と位置の定義に悩む必要はありません**。第 8 節までに詳しく検討した「一定の加速度 α を感じている質点 A」の時刻と位置こそが、局所加速度系の位置座標の原点 ($\xi = 0$ の点) における時刻と位置の定義そのものだからです (第 9 節では、「質点 A がいる場所以外の時刻と位置を、どうやって定義すれば良いのか?」が、議論の始まりだったコトを、思い出して下さい)。たとえば、上の図なら、「 k_0 系から見た局所加速度系の位置 $\xi = 0$ の点の軌跡」上にある点 R については、 k_0 系から見た点 R の座標 (t_R, x_R) を、厳密に計算するコトができます。実際に計算してみると、(7.5) 式と (8.2a) 式より (7.5) 式と (8.2a) 式の初期条件で決まる定数は、ココでの計算では、ちょっと不便なので、点 P の座標を代入して、改めて、計算し直しておきましょう)、ただちに、

$$t_R = \frac{c}{\alpha} \sinh \left\{ \frac{\alpha}{c} ((\tau_0 + \Delta\tau) - \tau_0) \right\} + \tau_0 = \frac{c}{\alpha} \sinh \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right) + \tau_0$$

$$= \frac{c}{\alpha} \left\{ \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right)^3 + \dots \right\} + \tau_0 \implies t_R \approx \tau_0 + \Delta\tau \quad (A2.1a)$$

$$x_R = \frac{c^2}{\alpha} \cosh \left\{ \frac{\alpha}{c} ((\tau_0 + \Delta\tau) - \tau_0) \right\} - \frac{c^2}{\alpha} = \frac{c^2}{\alpha} \cosh \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right) - \frac{c^2}{\alpha}$$

$$= \frac{c^2}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right)^2 + \dots \right\} - \frac{c^2}{\alpha} \implies x_R \approx 0 \quad (A2.1b)$$

であるコトが分かります (ココで、『双曲線関数 —— 便利な公式一覽』で紹介している級数展開公式も使いました)。ただし、局所加速度系は、十分に短い時間間隔 $\Delta\tau$ だけを考えるという条件でしたので、 $\Delta\tau$ の 2 次以上の項は、十分に小さい——すなわち、ココでは、 $(\alpha\Delta\tau/c)^2 \approx 0$ とみなさなければいけない——というコトに、注意しましょう。

□結局、点 R では、 k_0 系の座標 (t_R, x_R) と κ' 系の座標 $(\tau', \xi') = (\tau_0 + \Delta\tau, 0)$ が、同じになるコトが分かります。上の図では、点 R の x 座標が、明らかにゼロではない (t 軸から離れている) ように描かれていますが、実は、コレは、分かりやすさを優先した誇張です。あくまで、ココでの k_0 系は、 $x_R \approx 0$ とみなせるような範囲の時空間だけを考えているというコトを、覚えておいて下さいね。

■さて、 k_0 系 (t, x) と k' 系 (τ', ξ') は、ともに、「ホンモノ」の慣性系ですから、この2つの慣性系のあいだの変換公式は、良く知られた「ローレンツ変換」で表せるはずです。もちろん、ローレンツ変換を考えるためには、 k_0 系から見た k' 系の速さ v を、知らなければいけません。これは、 k' 系の位置座標の原点が、「一定の加速度 α を感じている質点 A」と、同一視できるコトに気づけたならば、(8.1) 式を使って、厳密に計算できて、

$$v = c \cdot \tanh \left\{ \frac{\alpha}{c} ((\tau_0 + \Delta\tau) - \tau_0) \right\} = c \cdot \tanh \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right) \\ = c \cdot \left\{ \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{c} \Delta\tau \right)^3 + \dots \right\} \implies v \simeq \alpha \Delta\tau \quad (A2.2)$$

となるのが分かります (ココでも、『[双曲線関数 — 便利な公式一覧](#)』にある級数展開公式、および、局所加速度系の条件 ($\alpha \Delta\tau / c \simeq 0$) を使いました)。よって、(1.1a) ~ (1.1b) 式より、 k_0 系 (t, x) と k' 系 (τ', ξ') のあいだのローレンツ変換式は、

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \cdot \left(t - \frac{\alpha \Delta\tau}{c^2} x \right) + \tau_{i.c.} \quad (A2.3a)$$

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \cdot (x - \alpha \Delta\tau \cdot t) + \xi_{i.c.} \quad (A2.3b)$$

と書けるコトが分かります。ココで得られたローレンツ変換式を、点 R に当てはめると、

$$\tau_0 + \Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \cdot \left(t_R - \frac{\alpha \Delta\tau}{c^2} x_R \right) + \tau_{i.c.} \quad (A2.4a)$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \cdot (x_R - \alpha \Delta\tau \cdot t_R) + \xi_{i.c.} \quad (A2.4b)$$

となり、同様に、点 S に当てはめると、

$$\tau_0 + \Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \cdot \left(t_S - \frac{\alpha \Delta\tau}{c^2} x_S \right) + \tau_{i.c.} \quad (A2.5a)$$

$$\Delta\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \cdot (x_S - \alpha \Delta\tau \cdot t_S) + \xi_{i.c.} \quad (A2.5b)$$

となります。(A2.4a) ~ (A2.5b) 式、および、(A2.1a) ~ (A2.1b) 式より、ただちに、

$$t_S = \tau_0 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \frac{\alpha \Delta\xi}{c^2} \right) \Delta\tau \implies t_S \simeq \tau_0 + \left(1 + \frac{\alpha \Delta\xi}{c^2} \right) \Delta\tau \quad (A2.6a)$$

$$x_S = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha \Delta\tau / c)^2}} \Delta\xi \implies x_S \simeq \Delta\xi \quad (A2.6b)$$

という関係が得られます。(A2.6a) 式からは、 k_0 系の位置座標の原点で、時間 $\Delta\tau$ だけ経過したときに (点 P → 点 R)、 k_0 系の位置座標 $x = \Delta\xi$ の点では、時間 $(1 + \alpha \Delta\xi / c^2) \Delta\tau$ だけ経過している (点 Q → 点 S) というコトが分かります。微小時間 $\Delta\tau$ のあいだは、 k_0 系と局所加速度系が同一視できるコトを、思い出して下さい。ココで得られた結果は、「局所加速度系」という、十分に短い時間間隔、十分に狭い空間だけを考えると、**一樣な加速度を感じている時空間では、位置によって、時間の進み方が変わる**——というコトを、意味しています。

■いま得られた結論を、定式化しておきましょう。一樣な加速度を感じている局所加速度系の位置座標の原点 ($\xi = 0$ の点) で時間 $\Delta\tau$ が経過したときの、位置座標 $\xi = \Delta\xi$ の点における時間経過を $\Delta\tau_{\Delta\xi}$ で表すコトにすると、両者は異なる値となり、 $\Delta\tau$ と $\Delta\tau_{\Delta\xi}$ のあいだの関係は、次の式で与えられます。

$$\Delta\tau_{\Delta\xi} = \left(1 + \frac{\alpha \Delta\xi}{c^2} \right) \cdot \Delta\tau \quad (A2.7)$$

□「等加速度運動」の場合は、速さ v が少しずつ異なる等速度運動をつなぎ合わせて、時間の極限をとる ($dt \rightarrow 0$ とする) ——という戦略で、うまく解くコトができました。「等加速度系」の場合も、時刻 τ と位置 ξ がそれぞれ少しずつ異なる局所加速度系をつなぎ合わせて、時間と空間の極限をとる ($d\tau, d\xi \rightarrow 0$ とする) という戦略を使いたいココですけど、極めて微小な空間内でさえも、時間の進み方が一樣でないのでは、局所加速度系どうしをつなぎ合わせる方法は、簡単ではなさそうです。

■「等価原理」を考える

■さて、ココまでの議論で、一樣な加速度 α の局所加速度系のなかでは、位置によって、時間の進み方が変化するというコトが分かりました。さらに、時間と位置の関係は、(A2.7) 式で与えられるのでした。ところで、この (A2.7) 式のなかの「 $\alpha \Delta\xi$ 」という量は、いったい、ナニを表しているのでしょうか。

■局所加速度系は、加速度運動しているので、局所加速度系に対して静止している物体 (「局所加速度系にいる物体」と呼ぶコトにしましょう) には、慣性力がはたらいているはずです。具体的には、加速度 α の局所加速度系にいる質量 m の質点には、慣性力 $F_\alpha = -m\alpha$ がはたらきます (慣性力の向きは、必ず、加速度の向きと逆になるコトに注意)。ココに、「 $\alpha \Delta\xi$ 」という量の意味を考えるヒントがあります。

■ココで、少し唐突ですけど、「位置エネルギー」について、考えてみましょう。位置エネルギーとは、単純化して説明すると、基準となる状態から、注目する状態まで、状態を静かに変化させるときに必要な「仕事」 (= 「物体を静かに移動させるのに必要な力」 × 「物体を移動させた距離」) を表したモノ——とみなすコトができます。たとえば、バネを、基準となる長さから、ある長さまで、静かに縮めるときに必要な仕事は、「バネ (弾性力) による位置エネルギー」となるワケです。同様に、慣性力による位置エネルギー (注: コレは、藤野の造語です) を、考えてみましょう。下の図を見ながら考えると、分かりやすいと思います。下図のように、質量 m の質点を、局所加速度系の位置 $\xi = 0$ の点 (基準点) から、位置 $\xi = \Delta\xi$ の点まで、静かに移動させるコトを考えましょう。この場合は、慣性力 $F_\alpha = -m\alpha$ に逆らって、質点を移動させなければならないので、質点には、 $-F_\alpha = m\alpha$ の力を加える必要があります。質点に $-F_\alpha = m\alpha$ の力を加えながら、 $\Delta\xi$ の距離だけ、静かに移動させるので、このときに必要な仕事、つまり、「慣性力による位置エネルギー ΔU_α 」は、

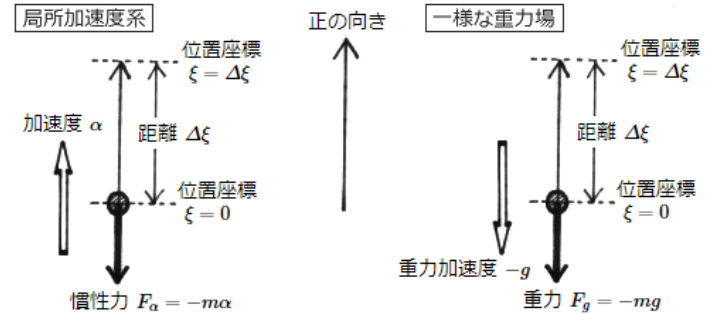
$$\Delta U_\alpha = -F_\alpha \cdot \Delta\xi = m\alpha \Delta\xi \quad (A2.8)$$

となります。

■慣性力による位置エネルギー ΔU_α は、考える物体の質量 m に依存する量です。そこで、局所加速度系の状態や性質だけに依存するよう量——すなわち、局所加速度系の状態や性質を表す量を、考えるコトにしましょう。ココで、「単位質量あたりの慣性力による位置エネルギー」というモノを考えると、この量は、局所加速度系の状態や性質を表す、1つの指標となります。これを、「慣性力ポテンシャル $\Delta\phi_\alpha$ 」と呼ぶコトにすれば (注: コレも、藤野の造語です)、 $\Delta\phi_\alpha$ は、ただちに、

$$\Delta\phi_\alpha = \frac{\Delta U_\alpha}{m} = \alpha \Delta\xi \quad (A2.9)$$

と表されるコトになります。つまり、(A2.7) 式に出てきた「 $\alpha \Delta\xi$ 」という量は、実は、「局所加速度系の位置座標の原点 ($\xi = 0$ の点) を基準としたときの、位置座標 $\xi = \Delta\xi$ の点における、単位質量あたりの慣性力による位置エネルギー (慣性力ポテンシャル)」を、表していたのでした。



■ココまで来れば、「等価原理」、すなわち、「加速度運動に伴う慣性力と、重力は、区別がつかない」というハナシが、どのように、特殊相対論に影響してくるのかは、すでに、想像できています。でも、あせらずに、上の図を見ながら、じっくりと、1つ1つ、検討を進めていきましょう。

■まず、いま、一樣な重力場のなかにいるとします。ちなみに、**どんな重力場でも、十分に狭い空間で、十分に短い時間間隔のあいだだけを考えるのであれば、一樣な重力場とみなせる**——というコトに、注意しておきましょう。さて、上の図のように、重力加速度が $-g$ の一樣な重力場中にある質量 m の物体にはたらく重力 F_g は、 $F_g = -mg$ となります。先ほどと同様に、「重力による位置エネルギー ΔU_g 」を、考えてみましょう。質量 m の物体を、重力場のなかの位置 $\xi = 0$ の点 (基準点) から、位置 $\xi = \Delta\xi$ の点まで、重力に逆らって、静かに移動させるのに必要な仕事——つまり、重力による位置エネルギー ΔU_g は、次の式で表されるコトが分かります。

$$\Delta U_g = -F_g \cdot \Delta\xi = mg \Delta\xi \quad (A2.10)$$

■次に、「単位質量あたりの重力による位置エネルギー」も、考えてみましょう。単位質量あたりの重力による位置エネルギーは、ふつう、「重力ポテンシャル」と呼ばれています（注：コチラは、藤野の造語ではなく、物理学の教科書でも使われる呼び方です。なお、(A2.10) 式の ΔU_g を「重力ポテンシャル」と呼ぶコトもあるようです）。重力ポテンシャル $\Delta\phi_g$ は、(A2.10) 式から、次のように表されます。

$$\Delta\phi_g = \frac{\Delta U_g}{m} = g\Delta\xi \quad (\text{A2.11})$$

□(A2.11) 式の $\Delta\phi_g$ は、正しく言うなら、「位置座標の原点 ($\xi = 0$ の点) を基準としたときの、位置座標 $\xi = \Delta\xi$ の点における、重力ポテンシャル」となります。

■さて、ココで、ようやく、「等価原理」の出番となります。「等価原理」という言葉は、いろんな説明がされているようです。この節の始めでは、「加速度運動に伴う慣性力と、重力は、区別がつかない」と説明しました。先ほどの図を使うならば、いかなるモノも、自分が、左の図の状態にあるのか、右の図の状態にあるのか、区別ができないというコトです。いかなるモノも、自分が、**一様な加速度 α ($\alpha = -g$) の局所加速度系にいるのか、重力加速度 $-g$ ($-g = \alpha$) の一様な重力場のなかにいるのか、区別するコトができないのです。「区別できない」というコトは、**一様な加速度 α の局所加速度系で成り立つコトは、重力加速度 $-g$ ($-g = \alpha$) の一様な重力場のなかでも、まったく同じように成り立つ**——というコトです（もしも、成り立たない場合があるのなら、成り立つかどうかを調べるコトで、自分は、局所加速度系にいるのか、一様な重力場中にあるのか、区別ができてしまうコトになります）。**

□なお、加速度 α の局所加速度系で成り立つ式を、重力加速度 $-g$ の一様な重力場中での成り立つ式に直すときに、単純に、数式中の α を $-g$ に置き換えるのは間違いです。先ほどの図や、(A2.9) 式と (A2.11) 式の導出過程を振り返れば分かるように、**等価原理の本質は、「慣性力 $F_\alpha = -m\alpha$ と、重力 $F_g = -mg$ 」、または、「慣性力ポテンシャル $\Delta\phi_\alpha = \alpha\Delta\xi$ と、重力ポテンシャル $\Delta\phi_g = g\Delta\xi$ 」が、お互いに区別できない（つまり、置き換えられる）**——というコトにあるのです。

■ところで、(A2.7) 式で示されているように、加速度 α の局所加速度系では、位置によって、時間の進み方が変わるのでした。それなら、「等価原理」によって、**重力加速度 $-g$ ($-g = \alpha$) の一様な重力場のなかでも、局所加速度系の場合と、まったく同じく、位置によって、時間の進み方が変わる**——というコトになるハズです。つまり、重力加速度 $-g$ の一様な重力場のなかでは、

$$\Delta\tau_{\Delta\xi} = \left(1 + \frac{g\Delta\xi}{c^2}\right) \cdot \Delta\tau = \left(1 + \frac{\Delta\phi_g}{c^2}\right) \cdot \Delta\tau \quad (\text{A2.12})$$

という関係が、成り立たなければいけないコトが分かります。

□たとえば、いま、東京スカイツリー全体を含む空間が、「重力加速度 $-g$ の一様な重力場」のなかにあるとみなせるとしましょう。正の向きに注意すると、地表から、東京スカイツリーの最頂部までの高さ $\Delta\xi$ は $\Delta\xi = 634$ [m] です。重力加速度 $-g$ を $-g = -9.8$ [m/s²]（すなわち、 $g = 9.8$ [m/s²]) とすると、地表での時間経過 $\Delta\tau$ と、東京スカイツリーの最頂部での時間経過 $\Delta\tau_{\Delta\xi}$ の関係は、

$$\Delta\tau_{\Delta\xi} = (1 + 6.9 \times 10^{-14}) \cdot \Delta\tau = \left(1 + \frac{1}{1.4 \times 10^{13}}\right) \cdot \Delta\tau \quad (\text{A2.13})$$

となります。したがって、東京スカイツリーの最頂部では、地表に比べて、14 兆分の 1 だけ速く、時間が進むコトになります。これは、地表で 46 万年が経過したときに、地表と、東京スカイツリーの最頂部で、ようやく、ちょうど 1 秒だけ、時刻がズれる——というコトです。

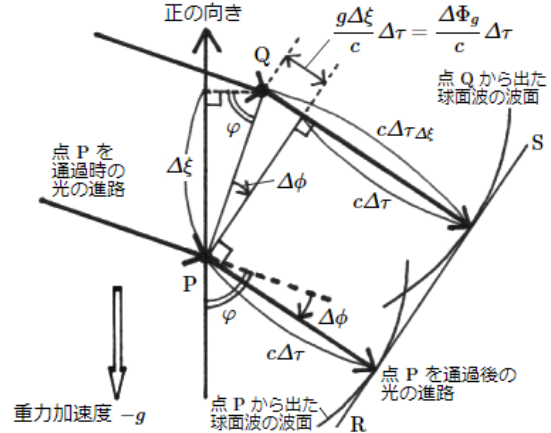
■重力場中で (A2.12) 式が成り立っているとすると、重力場のなかを進む光の振動数や波長が変化する現象（いわゆる、「**重力赤方偏移**」）を、説明するコトができます。たとえば、重力加速度 $-g$ の一様な重力場を、考えてみましょう。位置座標 $\xi = 0$ の点（基準点）において、微小時間 $\Delta\tau$ のあいだに Δn 回だけ振動する光の振動数 ν は、 $\nu = \Delta n / \Delta\tau$ で表されます。この光は、位置座標 $\xi = \Delta\xi$ の点では、 Δn 回だけの振動を、微小時間 $\Delta\tau_{\Delta\xi}$ のあいだにするコトになるので、観測される振動数 $\nu_{\Delta\xi}$ は、

$$\nu_{\Delta\xi} = \frac{\Delta n}{\Delta\tau_{\Delta\xi}} = \frac{\Delta n}{\{1 + (\Delta\phi_g/c^2)\} \cdot \Delta\tau} = \frac{1}{1 + (\Delta\phi_g/c^2)} \cdot \nu \quad (\text{A2.14})$$

となります。したがって、**基準点よりも重力ポテンシャルが大きい ($\Delta\phi_g > 0$) 場所では、基準点で観測される振動数 ν よりも、光の振動数が小さくなる（赤方偏移する）コトが分かります。**



■さらに、重力場中で光の進路が曲がるコト（いわゆる、「**重力レンズ効果**」）も、(A2.12) 式から、（半分だけは）説明できます（「半分だけ」と書いた理由は、あとで説明します）。下の図を見ながら、考えてみましょう。



■いま、光が、点 P を通過する前後で、進路がどれだけ曲げられるかを、考えてみます。光が、点 P に到達するとき、この光は、図のように、重力の向きに対して角度 φ で、進んで来たとします。この光が、点 P を通過した後には、重力場の影響で、図に描かれているように、微小角度 $\Delta\phi$ だけ曲げられると仮定しましょう。このときの、微小角度 $\Delta\phi$ が、(A2.12) 式から、計算できるのです。

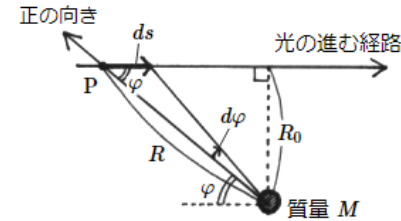
■重力の向きに対して角度 φ で、点 P に到達した光の波面を、PQ で表します。一方、「**ホイヘンスの原理**」により、点 P を通過した後の光の波面は、点 P から出る球面波と、点 Q から出る球面波を描いたときの、2 つの球面波の接線 RS となります。まず、点 P から出る球面波を考えましょう。微小時間 $\Delta\tau$ のあいだに光が進む距離は $c\Delta\tau$ です。それでは、点 Q から出る球面波は、どうなるでしょうか。点 P で微小時間 $\Delta\tau$ が経過したとき、(A2.12) 式から、点 Q での経過時間は $\Delta\tau_{\Delta\xi}$ となるコトが分かります。微小時間 $\Delta\tau_{\Delta\xi}$ のあいだに光が進む距離は $c\Delta\tau_{\Delta\xi}$ です。よって、この場合、ホイヘンスの原理は、上の図のように描かれるコトになります。微小時間 $\Delta\tau$ のあいだに光が進む距離 $c\Delta\tau$ を、 $\Delta s = c\Delta\tau$ と書くコトにすると、簡単な計算により、このときの微小角度 $\Delta\phi$ が、次の式で与えられるコトが分かります。

$$\sin(\Delta\phi) = \frac{g\Delta s}{c^2} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\Delta\phi_g}{\Delta\xi}\right) \Delta s \cdot \sin\varphi \quad (\text{A2.15a})$$

$$\text{したがって } \Delta\phi \simeq \frac{g\Delta s}{c^2} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\Delta\phi_g}{\Delta\xi}\right) \Delta s \cdot \sin\varphi \quad (\Delta\phi \ll 1) \quad (\text{A2.15b})$$

つまり、重力加速度 $-g$ の一様な重力場中では、光は、微小距離 Δs だけ進むあいだに、(A2.15a) 式、または、(A2.15b) 式で与えられる微小角度 $\Delta\phi$ だけ、重力の向きに曲げられるコトになります。

■具体的な状況で、重力レンズ効果の大きさを、計算してみましょう。いま、下図のように、質量 M の質点のすぐ近くを、光が進むときに、この質点の作る重力場によって、光がどれだけ曲げられるかを、考えてみます。



■さて、まず、簡単のため、光は、きわめて小さくしか曲げられないので、ほぼ直線上を進むと考えて、かまわないとしましょう。光が、この直線上の微小距離 ds を進むあいだに、曲げられる微小角度 $d\phi$ は、(A2.15b) 式で与えられています。そこで、光が、この微小距離 ds だけ進むごとに生じる微小角度 $d\phi$ を、直線全体にわたって積算するコトで、光が曲げられる角度の総計 ϕ を求める——という方針で、計算していきましょう。まず、微小距離 ds は、正弦定理を用いれば、 $ds / \sin(d\phi) = \{R_0 / \sin(\varphi + d\phi)\} / \sin\varphi$ となりますけど、角度 $d\phi$ が十分小さいなら、 $\sin(d\phi) \simeq d\phi$ 、 $1 / \sin(\varphi + d\phi) \simeq 1 / \sin\varphi - (\cos\varphi / \sin^2\varphi) d\phi$ と表せるので、 $d\phi$ の 2 次以降の項を無視すれば、結局、

$$ds = \frac{R_0}{\sin^2 \varphi} \cdot d\varphi \quad (d\varphi \ll 1) \quad (\text{A2.16})$$

とみなして計算するコトができます（ココで、高校数学の範囲外であるテイラー展開を使いましたが、許して下さいね）。また、距離 R は、光の経路から質点までの最短距離 R_0 を用いて、 $R = R_0 / \sin \varphi$ で表せます。最後に、点 P における重力加速度 g については、ニュートンの万有引力の法則 $g = GM/R^2$ が成り立つと考えると、最終的に、(A2.15b) 式は、

$$d\phi = \frac{GM}{c^2 R_0} \sin \varphi \cdot d\varphi \quad (\text{A2.17})$$

となります（ G は、万有引力定数です）。コレを、光が進む経路の全体にわたって積算するには、角度 φ について、 $\varphi = 0$ から $\varphi = \pi$ までの区間で積分すれば良いので、結局、光が曲げられる角度の総計 ϕ は、

$$\phi = \int_0^\pi \frac{GM}{c^2 R_0} \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{2GM}{c^2 R_0} \quad (\text{A2.18})$$

で与えられるコトが分かります。たとえば、 M を太陽質量、 R_0 を太陽半径として、太陽表面をかすめる光が、太陽の重力場によって曲げられる角度 ϕ は、 $\phi = 4.244 \times 10^{-6}$ [rad] = 0.875 [秒角] となるコトが分かります。ちなみに、1 [秒角] とは、1 [度] の 3600 分の 1 の角度です。肉眼では、たんなる点にしか見えない火星でさえも、最接近時には、視直径が 20 [秒角] 前後になるので、0.875 [秒角] という角度の大きさ（小ささ？）が、イメージできると思います。

□ところで、この結果は、「重力場中では場所によって時間の進み方が変化する」というコトだけを使って、得られたモノでした。でも、実際は、一般相対論の帰結として、重力場中では、空間自体もゆがむコトが知られています。時間の進み方の変化と、空間のゆがみの、2 つの効果を含めると、実際の ϕ は、(A2.18) 式のちょうど 2 倍になります。このあたりが、特殊相対論の限界——というコトなのかも知れませんね。

□一方で、(A2.12) ~ (A2.14) 式の結果は、時間の進み方の変化だけに関係するモノで、空間のゆがみのハナシは関係ないので、一般相対論の世界でも、この通りに成り立ちます。特殊相対論も、なかなか、バカにはできませんよ——というコトなのかも知れませんね。

■「等価原理」がいざなう、驚くべき世界——

■さて、ココまで、「特殊相対論に、『等価原理』の考え方を導入したら、どうなるのか？」について、いろいろと計算してきました。そして、いろいろと驚くべき結果が導かれました。でも、藤野が考える、最も驚くべき帰結は、「**特殊相対論に、『等価原理』の考え方を導入したなら、世界の見え方が変わる**」というコトだと思うんですね。どういうコトなのか、「自由落下する物体」を例に、見てみましょう。

■まず、一樣な加速度 α の局所加速度系にいる観測者を考えます。もちろん、局所加速度系にいる観測者から見たら、「ホンモノの」慣性系に対して静止している質点（「ホンモノの」慣性系にいる質点）は、もはや、静止してはいないし、慣性運動さえしていません。「ホンモノの」慣性系の時刻と位置 (t, x) においても、 $x = x_P$ (x_P は定数) で表されるような点（「ホンモノの」慣性系に対して静止している点）を考えて、コレを (12.1a) ~ (12.1d) 式に代入して、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」の時刻と位置 (τ, ξ) に変換すれば、この点が加速度運動（非慣性運動）をしているコトが分かります。

□もちろん、局所加速度系は、「質点 A のいる等加速度系 (κ_A 系)」とは違うので、局所加速度系において、(12.1a) ~ (12.1d) 式が、そのまま、厳密に成り立つワケではありません。けれど、「ホンモノの」慣性系に対して静止している点を、局所加速度系にいる観測者から見ると、もはや、静止してはいないし、慣性運動もしていない——という、本質的な部分は、変わりありません。

■コレを、「等価原理」の立場から見たら、どうなるでしょうか。「加速度 α の局所加速度系で成り立つコトは、重力加速度 $-g$ ($-g = \alpha$) の一樣な重力場中でも、まったく同じように成り立つ」というのが、等価原理の立場なのでした。すなわち、**一樣な重力場中で静止している観測者（「一樣な重力場中**にいる**観測者」と呼ぶコトにします）から見たときにも、「ホンモノの」慣性系に対して静止している質点は、もはや、静止してはいないし、慣性運動もしていない——というコトです。けれど、一樣な重力場中で静止している観測者にとって、「ホンモノの」慣性系にいる質点とは、ナニを意味しているのでしょうか。**

■ココで、一樣な重力場のなかで、自由落下している物体を、想像してみてください。重力場中を自由落下する、この物体自身は、ナンのかも、感じてはいません。「いやいや。重力に引っ張られてるんだから、最低でも、重力は感じるハズだ」と、反論したくなるかも知れません。でも、自由落下というコトは、「重力」と「(落下運動の加速度に伴う) 慣性力」が、ちょうど、釣り合っている状態というコトです。「でも、慣性力は、あくまで、「見かけの力」にすぎないハズだ」と、反論したくなるかも知れません。確かに、ニュートン力学の立場では、そのように考えます。でも、現実の問題として、自由落下している物体自身は、ナンのかも感じてはいない——というのは、まぎれもない事実です。それは、宇宙飛行士が、イチバン良く知っています。すなわち、**等価原理の立場では、自由落下している物体こそが、ナンのかもはたらいでない物体なのであり、したがって、「ホンモノの」慣性系にいる物体である——というコトになるのです。その結果、局所加速度系にいる観測者から見ると、「ホンモノの」慣性系にいる物体が、加速度運動しているのと同じように、重力場中**にいる**観測者からは、自由落下する物体は「ホンモノの」慣性系にいる物体が、加速度運動しているように見える——というワケです。**

■コレは、驚くべき、世界観の転換です。どれほど信じがたいコトを主張しているかは、ニュートン力学の立場での、常識的な「自由落下の解釈」と、並べて、比較してみると、明らかだと思っています。

【**ニュートン力学の立場**】重力場中を自由落下する物体には、重力だけが、はたらいしています。そのため、重力場中

にいる観測者が見たとき、自由落下する物体は、ニュートンの運動方程式 $F = m\alpha$ にしたがって、加速度運動をする。
【**等価原理の立場**】重力場中を自由落下する物体自身は、ナンのかも、感じてはいない。つまり、重力場中を自由落下する物体には、まったく、力がはたらいしてはいない。したがって、重力場中

にいる観測者から見たら、自由落下する物体は、局所加速度系にいる観測者から見たときの、「ホンモノの」慣性系にいる物体と、まったく同じように振る舞う。その結果として、重力場中

にいる観測者から見たとき、自由落下する物体は、加速度運動をする。
——つまり、**等価原理の立場では、重力は（そして、加速度運動に伴う慣性力も）、もはや、「力」ではないのです。**ナニを言っているのか、意味が分かりませぬよ。でも、どんなに意味が分からなくても、等価原理の立場では、重力場中で、モノが落ちるのは、重力がはたらいしているからではなくて、ナニも力がはたらいしていないからである——という帰結が、必然的に、導かれてしまうのです。
□一般相対論の解説では、重力場を、薄いゴムシートに喩えるコトが、多いように感じます。平らに張られた、大きな薄いゴムシートの上に、重い球体載せると、ゴムシートは、球体を置いた場所を中心に、くぼみます。コレが、「空間のゆがみ」、すなわち、重力場を表しているのです——という喩えです。この喩えでは、「ゴムシート上に、ビー玉を置くと、ビー玉は、このくぼみに向かって、転がっていきます。この様子を、真上から見ると、ビー玉が、重い球体に、引っ張られていくように見えます。コレが、『重力』の正体です」というふうに、説明されるみたいです。つまり、私たちが「重力」と感じているモノは、ホンモノの「力」ではなく、「空間のゆがみ」を感じているだけで、重力に引っ張られて動いているように見える物体は、実際には、ただ、「空間のゆがみ」に沿って、移動しているだけなのです——というワケです。

□この喩えが、「一般相対論における重力場の描像」として、どれほど正しいモノなのか、藤野には分かりません（そもそも、この喩えでは、静電場も、重力場と、本質的な違いはない——というコトになってしまふ気がします）。少なくとも、等価原理の立場を説明する喩えとは言えないでしょう。

□実は、この喩えは、「**測地線**」のハナシに由来しています。測地線を考えるときには、「時空間」と「(ただの) 空間」の違いが、重要です。上の喩えは、この違いを、あえて無視しているのです。

■「等価原理」から導かれる、このような結論は、常識的な感覚からは、かけ離れたモノで、すんなりと受け入れるのは、難しいでしょう。もしかしたら、SF 作品でお馴染みの、「**スペースコロニー**」を思い浮かべると、良いのかも知れません。「スペースコロニー」では、加速度運動に伴う慣性力の 1 つである遠心力を、「擬似重力」として利用します。常識的な感覚（ニュートン力学の立場）では、遠心力と重力は、まったく別のモノですので、スペースコロニー内部の物理法則や、日常生活における人々の体感が、どうなるかを考えるのは、ちょっと難しくそうです。けれど、**等価原理の立場なら、十分に狭い空間で、十分に短い時間間隔のあいだだけを考えるのであれば、誰も、自分が、地球上（重力場中）にいるのか、スペースコロニー（局所加速度系）にいるのか、区別ができないというコトになります。**そう考えると、SF 好きな人ならば、等価原理のハナシが、少しだけ、身近なモノに感じられてくるとと思います。

■そして、「一般相対論」へ——

■ココまでの議論によって、特殊相対論（重力を含まない相対論）に、「等価原理」という考え方を導入するコトで、重力も含む相対論——つまり、「一般相対論」に、だいぶ、近づいたように、感じたくも知れません。けれども、**一般相対論の完成までには、まだ、2 つの重大な問題が残っています。それは、「等価原理の正当性」と、「一般相対性原理との整合性」の、2 つの問題です。**

■まず、「等価原理の正当性」を考えてみましょう。そもそも、等価原理は、ホントに正しいのか？——という問題です。コレまでの「等価原理の立場」の説明と、その帰結のハナシを、直感的に、すんなりと納得できたという人は、少ないでしょう。そうなってくると、それらすべての前提となっている等価原理そのものが、間違っているのではないかと——と考えたくなるのは、ごく自然なコトです。

■実は、等価原理を、実験的に検証する方法が、1 つ、あるのです。ココまでの説明において、等価原理の本質は、「慣性力 $F_\alpha = -m\alpha$ と、重力 $F_g = -mg$ 」、または、「慣性力ポテンシャル $\Delta\phi_\alpha = \alpha\Delta\xi$ と、重力ポテンシャル $\Delta\phi_g = g\Delta\xi$ 」が、お互いに区別できないコトである——と述べてきました。ところで、当たり前のように、「慣性力 $F_\alpha = -m\alpha$ と、重力 $F_g = -mg$ 」と書かれていますけど、**慣性力の大きさを決める質量 m と、重力の大きさを決める質量 m が、同じモノであるという理論的な根拠は、実際には、どこにもありません。**次のように、整理して比べてみると、その意味が、良く分かると思います。

【**電気力**】電場のなか

にいる物体には、物体がいる場所の電場 E に比例する電気力（クーロン力） F_E がはたらく。電気力の大きさを決める、その比例定数は、物体に固有の物理量であり、コレを「電気量」 q と呼ぶ。
【**重力**】重力場のなか

にいる物体には、物体がいる場所の重力加速度 g に比例する重力 F_g がはたらく。重力の大きさを決める、その比例定数は、物体に固有の物理量であり、コレを「重力質量」 m_G と呼ぶ。
【**慣性力**】加速度運動する物体には、その加速度 α に比例する慣性力 F_α がはたらく。慣性力の大きさを決める、その比例定数は、物体に固有の物理量であり、コレを「慣性質量」 m_I と呼ぶ。
——「電気力」と「重力」は、まったく別モノの力ですので、同じ物質の性質を表す物理量でも、電気力に関わる「電気量」と、重力に関わる「重力質量」が、まったく異なる物理量であるのは、当たり前だと感じます。それなら、ニュートン力学の立場では、「慣性力」と「重力」も、まったく異なる力なので、同様に、「慣性質量」と「重力質量」は、まったく異なる物理量である——というコトになるハズです。

■ところが、等価原理の立場では、「慣性力」と「重力」は、区別がつかないのですから、「慣性質量」と「重力質量」も、区別がつかない——というコトになるハズです。つまり、現実の世界で、ニュートン力学の立場が正しいのか、等価原理の立場が正しいのかは、慣性質量と重力質量が、まったく同じモノとみなせるかどうかを、実際に実験して、確かめれば良い——というコトになるのです。実は、このコトを確かめる実験は、アインシュタインが特殊相対論の研究を始める前から行われていて、現在に至るまで、多くの科学者が、多くの異なる方法で、検証し続けていますが、藤野の知る限り、慣性質量と重力質量が、異なるモノであるという証拠は、いまだに見出せていません。これは、「等価原理の立場が正しい」というコトを、示しているように思えます。そんなワケで、いまのトコロは、「私たちが生きているこの世界は、等価原理が成り立っている世界である」と考えておくのが、無難であるように思えます。

□もちろん、「実験の精度が不十分なだけで、もっと高い精度で測定すれば、慣性質量と重力質量の違いが、検出できるハズだ」とか、「慣性質量と重力質量は、たまたま、偶然に、同じモノのように観測されるだけで、それを理由に、ニュートン力学の立場が、否定されるワケではない」とかいった主張を、するコトはできるでしょう。でも、あんまり、説得力があるようには、思えませんよね。

■さて、理論的に、局所加速度系のコトが計算できるので、等価原理を用いて、重力場中で起こるコトについても、理解できるようになり、さらに、実験的に、「等価原理の正当性」が保証されたのですから、「一般相対論の完成」は、もう目の前のように思えます。つまり、全宇宙の全空間を、「局所加速度系」(十分に短い時間間隔で、十分に狭い空間)に分割して、それぞれの局所加速度系の加速度＝重力加速度を調べて、最後に、すべての隣り合った局所加速度系どうしを接続すれば、全宇宙の全空間で起こるコトのすべてを、完璧に記述できるハズです。

□これは、加速度運動について、「どのような加速度運動も、微小時間 dt のあいだの(それぞれ、少しずつ速度の異なる)等速度運動を、つなぎ合わせたモノ(における $dt \rightarrow 0$ の極限)である」と考えたコトに、似ています。すなわち、「どのような重力場も、微小時間 Δt ・微小体積 $\Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta$ (それぞれ、少しずつ重力加速度の異なる)一様な重力場＝局所加速度系を、つなぎ合わせたモノである」と、考えるワケです。

■しかし、現実には、そんなに上手くはいきません。まず、どんな質量をどんなふう配置しても、一様な重力場を作るコトはできません。そのために、隣り合った局所加速度系どうしは、加速度＝重力加速度の大きさだけでなく、向きも、少しずつ異なる——というコトになるのです。等加速度運動を考えたときは、時間 $dt \rightarrow 0$ の極限だけを考えれば、それぞれ少しずつ速度の異なる等速度運動を、接続できたワケですけど、この場合は、どのように、隣り合った局所加速度系どうしを、接続すれば良いのか、判断するコトが難しくなります。しかも、ただ単純に、 $\Delta r, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta \rightarrow 0$ の極限をとって接続するだけでは、「一般相対性原理」を満たすコトができない——という重大な問題が、生じてしまうのです。

■「一般相対性原理」とは、「物理法則のカタチは、どんな座標系から見ても、変わらない(同じ数式で表される)」という考え方です。ちなみに、特殊相対論では、「物理法則のカタチは、どんな『慣性系』から見ても、変わらない(同じ数式で表される)」と考えたのでした。もしも、変わってしまうのなら、物理法則のカタチを見比べるコトで、「自分のいる慣性系こそが、絶対に間違いない静止している慣性系(絶対静止系)である」と、証明できてしまうコトになります。でも、「自分こそが、絶対に間違いない静止している」と、証明できる人・モノは、存在しない——すなわち、「静止」という概念は、絶対的に決まるようなモノではなく、「観測者 A から見て、物体 C は静止しているけど、観測者 B から見れば、物体 C は動いている」といったふうに、あくまで、相対的に判断されるモノである——と考えたコトが、特殊相対論の始まりだったのです。特殊相対論は、「慣性系」に限って、相対性原理を考えましたが、一般相対論では、その考え方を、「すべての座標系」(当然、「すべての座標系」には、局所加速度系も含まれます)に、拡張しなければならない——と、アインシュタインが考えたのは、必然的なコトだし、当然のコトであると言えるでしょう。

□たとえば、電磁気学のマクスウェルの方程式は、ローレンツ変換(ある慣性系から別の慣性系への座標変換)をしても、方程式のカタチが変わりません。つまり、マクスウェル方程式は、「物理法則のカタチは、どんな『慣性系』から見ても、変わらない(同じ数式で表される)」という特殊相対論における相対性原理を、満たしているワケです。

□一方で、ニュートンの運動方程式 $F = ma$ は、ローレンツ変換をすると、新たな項が現れるなど、方程式のカタチが変わってしまいます。すなわち、ニュートンの運動方程式は、特殊相対論における相対性原理を、満たしていません。特殊相対論の世界では、 $F = ma$ は、あくまで、2 つの慣性系のあいだの相対速度が、十分に小さいときだけに成り立つ、近似式にすぎないというワケです。

■けれども、一般相対性原理との整合性を保ちながら、隣り合う局所加速度系(しかも、加速度の向きも大きさも異なる局所加速度系)どうしを接続するのは、至難のワザです。もしも、観測者がいる座標系が変わっても(座標変換しても)、大きさが変わらない量や、カタチが変わらない方程式を見つければ、それを手がかりにして、一般相対論の完成に近づけそうです。

■実は、座標変換しても、大きさが変わらない量や、カタチが変わらない方程式を見つければ、数学の重要な専門分野の 1 つとして、古くから、研究されていました。それが、たとえば、テンソル解析や、そこから発展したリーマン幾何学です。そんなワケで、一般相対論を完成させるためには、テンソル解析や、リーマン幾何学の勉強が、どうしても必要になってくるのです。テンソル解析や、リーマン幾何学の勉強は、正直に言って、とても難しく、タイヘンです。でも、「なぜ、ナニを知りたくて、学ぶのか」が、明確であるなら、勉強に挑む意欲も、効率も、ぜんぜん違ってくると思います。もし、一般相対論に興味を持ったなら、ぜひ、テンソル解析や、リーマン幾何学の勉強に、挑戦してみてくださいね。

