

任意の方向へ運動する慣性系に対するローレンツ変換、 そして、特殊相対論的に正しい運動方程式へ。 —— 4元運動量も、反変・共変ベクトルも使わずに、相対論的力学を考えるよ！

■特殊相対論の教科書や解説などでは、ほとんどの場合、「ある慣性系から見て、 x 軸方向に一定の速さ v で動いている別の慣性系について考える」とか、「ある観測者から見て、 x 軸方向に一定の速さ v で動いている質点について考える」とか、**たいてい、 x 軸方向だけが、特別扱いですよね。**

■もちろん、ハナシを簡単にするためには、当然のコトです。たとえば、「ある慣性系から見て、**任意の好きな方向**に一定の速さ v で動いている別の慣性系について考える」だと、途端に、計算がメンドクさくなります。でも、 x 軸方向だけを特別扱いするコトで、さまざまな「誤解」の生じる余地ができてしまうので、注意が必要です。あのアインシュタインでさえ、「 x 軸方向だけを特別扱いしたローレンツ変換」を使って、ニュートンの運動方程式の考察をするコトで、「1つの質点に対して、『縦質量』と『横質量』を、それぞれ、別々に考える必要が生じる」という「誤解」をしてしまったコトは、良く知られています（もちろん、アインシュタインは、すぐに、間違いに気づくワケですけど……）。

□藤野の気のせいかも知れませんが、このアインシュタインの例のように、 x 軸方向だけを特別扱いするコトで生じる「特殊な」結果を、どんな場合にも成り立つ「普遍的な」結果であると、「誤解」したまま、特殊相対論を理解したつもりになっている人は、少なくないのでは……と、危惧しています。

■そんなワケで、特殊相対論を勉強するのなら、一度は、「ある慣性系から見て、**任意の好きな方向**に一定の速さ v で動いている別の慣性系」や、「ある観測者から見て、**任意の好きな方向**に一定の速さ v で動いている質点」についても考えておく、良いと思います。より高い視点から、より深く、特殊相対論の世界をイメージできるようになるに、違いありません。

■ココでは、はじめに、「**任意の好きな方向へ運動する慣性系に対するローレンツ変換**」を紹介しましょう。そして、いわゆる「速度の合成則」や、加速度の変換式を求めます。さらに、マクスウェルの方程式に対して、「任意の好きな方向へ運動する慣性系に対するローレンツ変換」を適用して、電磁場の変換式を求めてみます。ココまで来れば、「**特殊相対論的に正しい運動方程式**」までは、もう目の前です。

□先ほど、「『ある慣性系から見て、任意の好きな方向に一定の速さ v で動いている別の慣性系について考える』だと、途端に、計算がメンドクさくなります」と、書きました。とっても大切なコトなので、特に強調しておきたいんですけど、「**メンドクさい**」と、「**難しい**」は、**違います**。計算は長ったらしいけど、やっけるコトは、単純な式変形——それなのに、なかなか、正解にたどり着かないと、「難しい」、「自分には無理」と勘違いして、（若い頃の藤野みたいに）投げ出してしまうのは、もったいないですよ。

【目次】

- | | |
|--|---|
| <p>1. 一般ローレンツ変換
—— 任意の方向に運動する慣性系への変換法則</p> <p>2. 速度の合成則
—— 2つの慣性系から見た速度の関係</p> <p>3. 加速度の変換式
—— 2つの慣性系から見た加速度の関係</p> <p>4. マクスウェル方程式のローレンツ変換
—— 2つの慣性系から見た電磁場の関係</p> | <p>5. 特殊相対論的に正しい運動方程式
—— ニュートンの運動方程式のローレンツ変換</p> <p>6. 特殊相対論的に正しい運動力学
—— 特殊相対論的な「運動量」と「エネルギー」</p> <p>7. 特殊相対論的な運動量とエネルギーの関係
—— 新たな世界観への扉を開く</p> <p style="text-align: center;">おまけ：固有時間で測った速度と加速度</p> |
|--|---|

■ 1. 一般ローレンツ変換 —— 任意の方向に運動する慣性系への変換法則

■時刻と位置が、座標 (t, x, y, z) で表される慣性系を、 k 系とします。位置座標を、 $r_k = (x, y, z)$ のように、ベクトルで表すコトにすると、 k 系の時刻と位置は、 (t, r_k) のように表すコトもできます。

■次に、 k 系から見て、速度 $v = (v_x, v_y, v_z)$ 、速さ $v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ で運動している慣性系を、 κ 系と呼びましょう。 κ 系の時刻と位置は、座標 (τ, ξ, η, ζ) で表されるとします。 κ 系の位置座標を、 $r_\kappa = (\xi, \eta, \zeta)$ のように、ベクトルで表すコトにすると、 κ 系の時刻と位置は、 (τ, r_κ) のように表すコトもできます。

■ k 系 (t, r_k) と κ 系 (τ, r_κ) のあいだの変換公式（座標変換）は、「**一般ローレンツ変換**」と呼ばれるコトが多いようです（「 x 軸方向だけを特別扱いしないローレンツ変換」という意味で、「一般相対論」とは、なんの関係もありません）。具体的には、光速の大きさを c とすると、(1.1a) ~ (1.1b) 式ようになります。

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(t - \frac{v \cdot r_k}{c^2} \right) \quad (1.1a)$$

$$r_\kappa = r_k + \left\{ -\frac{v \cdot r_k}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot r_k}{v^2} - t \right) \right\} v \quad (1.1b)$$

■もちろん、(1.1a) ~ (1.1b) 式から、その「**逆変換**」を求めるコトができます。実際に、

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\tau + \frac{v \cdot r_\kappa}{c^2} \right) \quad (1.2a)$$

$$r_k = r_\kappa + \left\{ -\frac{v \cdot r_\kappa}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot r_\kappa}{v^2} + \tau \right) \right\} v \quad (1.2b)$$

となるコトが、(1.1a) ~ (1.1b) 式から分かります。これは、(1.1b) 式の両辺に、左から v をかけると、簡単に計算できます（ $v \cdot r_k$ を、 $v \cdot r_\kappa$ と t だけで表すコトができるので、これを、(1.1a) 式に代入すれば、 $v \cdot r_k$ が消去されて、(1.2a) 式が導かれます。あとは、説明不要でしょう）。ちなみに、以下、「ベクトルをかける」と言ったときには、特に断らない限り、「ベクトルの内積をとる」というコトを意味します）。

□実際は、(1.1a) ~ (1.2b) 式には、初期条件で決まる定数項を加える必要があります（なお、 k 系と κ 系の原点が重なる瞬間に、お互いの時刻をゼロに合わせる——という初期条件のもとでは、これらの定数はゼロとなります）。でも、定数項は微分すると消えるので、以下の議論では考慮する必要はありません。

□一般ローレンツ変換の導出方法については、どうしても、高校までに習う数学では扱わない、「行列」や「座標の回転操作」の概念・知識がないと、ムリそうなので、割愛。特殊相対論の教科書や解説などには、詳しく説明されているモノも、たくさん、あるようですので、興味があれば、ぜひ、調べてみて下さいね。

□(1.1a) ~ (1.2b) 式は、ベクトル記号を使って、表しましたが、成分ごとに書き下ろすと、

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} \right) \quad (1.3a)$$

$$\xi = x + \left\{ -\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} - t \right) \right\} v_x \quad (1.3b)$$

$$\eta = y + \left\{ -\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} - t \right) \right\} v_y \quad (1.3c)$$

$$\zeta = z + \left\{ -\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} - t \right) \right\} v_z \quad (1.3d)$$

および、

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\tau + \frac{v_x \xi + v_y \eta + v_z \zeta}{c^2} \right) \quad (1.4a)$$

$$x = \xi + \left\{ -\frac{v_x \xi + v_y \eta + v_z \zeta}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v_x \xi + v_y \eta + v_z \zeta}{v^2} + \tau \right) \right\} v_x \quad (1.4b)$$

$$y = \eta + \left\{ -\frac{v_x \xi + v_y \eta + v_z \zeta}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v_x \xi + v_y \eta + v_z \zeta}{v^2} + \tau \right) \right\} v_y \quad (1.4c)$$

$$z = \zeta + \left\{ -\frac{v_x \xi + v_y \eta + v_z \zeta}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v_x \xi + v_y \eta + v_z \zeta}{v^2} + \tau \right) \right\} v_z \quad (1.4d)$$

となります。スペース的にキツイので、以下では、特に必要がない場合は、ベクトル記号を使った表記で、説明するコトにします。慣れてさえしまえば、ベクトル記号を使った計算のほうが、遥かにラクですので、『**ベクトル解析 —— 便利な公式一覧**』を参照しながら、頑張り続けて下さいね。



■ところで、「 k 系から見て、速度 v で運動している慣性系を、 κ 系とする」と、決めましたけど、逆に、 κ 系から見て、 k 系は、どのように見えているのでしょうか。いま、 k 系の任意の位置座標 $r_k^{(P)} = (x^{(P)}, y^{(P)}, z^{(P)})$ に静止している点 P を、 κ 系から見たときの位置座標を $r_\kappa^{(P)}$ とおきます (κ 系から見たら、点 P は、もはや、静止していないコトに注意)。このとき、 κ 系から見た点 P の速度 $dr_\kappa^{(P)}/d\tau$ が、「 κ 系から見た k 系の速度」を表します。 $dr_\kappa^{(P)}/d\tau$ は、(1.1b) 式の両辺を τ で微分するコトにより ($x^{(P)}, y^{(P)}, z^{(P)}$ は定数なので)、

$$\frac{dr_\kappa^{(P)}}{d\tau} = -\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{dt}{d\tau} \right) v \quad (1.5)$$

となります。 $dt/d\tau$ については、(1.2a) 式を τ で微分し、さらに、(1.5) 式を代入して、整理すれば、

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} \quad (1.6)$$

が得られます。最後に、この (1.6) 式を、(1.5) 式に代入すると、

$$\frac{dr_\kappa^{(P)}}{d\tau} = -v = -(v_x, v_y, v_z) \quad (1.7)$$

であるコトが分かります。つまり、「 k 系から見て、速度 v で運動している慣性系が、 κ 系である」ならば、「 κ 系から見て、速度 $-v$ で運動している慣性系が、 k 系である」というコトになるのです。なお、(1.7) 式は、ベクトル v の ξ 成分が v_x 、 η 成分が v_y 、 ζ 成分が v_z であるコトも、示しています。そこで、新たな記号として、 $v_\xi \equiv v_x$ 、 $v_\eta \equiv v_y$ 、 $v_\zeta \equiv v_z$ とおき、 v の 2 つの表記法を、文脈に応じて、使い分けるコトにします。

■ 2. 速度の合成則 —— 2 つの慣性系から見た速度の関係

■いま、任意の運動をしている質点があるとします。この質点の運動を、 k 系、および、 κ 系から見たときに、どのように観測されるのかを、考えてみましょう。 k 系から見た質点の速度を $u = (u_x, u_y, u_z)$ とし、 κ 系から見た質点の速度を $\omega = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ とすると、定義より、次のように、書き表すコトができます。

$$u = \frac{dr_k}{dt} \quad \text{または} \quad (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (2.1a)$$

$$\omega = \frac{dr_\kappa}{d\tau} \quad \text{または} \quad (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) = \left(\frac{d\xi}{d\tau}, \frac{d\eta}{d\tau}, \frac{d\zeta}{d\tau} \right) \quad (2.1b)$$

■ k 系から見た質点の速度 u と、 κ 系から見た質点の速度 ω のあいだの関係を調べるために、(2.1a) 式を、次のように、合成関数の微分の法則を使って、式変形してみましょう。

$$u = \frac{dr_k}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dr_k}{d\tau} \quad (2.2)$$

このように、 u は 2 つの微分の積で表せるワケですけど、 $d\tau/dt$ については (1.1a) 式を t で微分し、 $dr_k/d\tau$ については (2.1b) 式を τ で微分すれば、それぞれ (k 系も κ 系も慣性系なので、さしあたって、以下では、この 2 つの慣性系のあいだの相対速度 v は、時刻や位置座標には依存しないとみなせるコトに注意して)、

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dr_k}{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2} \right) \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr_k}{d\tau} &= \frac{dr_\kappa}{d\tau} + \left\{ -\frac{v}{v^2} \cdot \frac{dr_\kappa}{d\tau} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v}{v^2} \cdot \frac{dr_\kappa}{d\tau} + 1 \right) \right\} v \\ &= \omega + \left\{ -\frac{v \cdot \omega}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot \omega}{v^2} + 1 \right) \right\} v \end{aligned} \quad (2.3b)$$

が得られます (ココで、(2.1a) ~ (2.1b) 式を用いました)。コレらを、(2.2) 式に代入すると、

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2} \right) \left[\omega + \left\{ -\frac{v \cdot \omega}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot \omega}{v^2} + 1 \right) \right\} v \right] \quad (2.4)$$

となります。目障りな右辺の $v \cdot u$ の部分を消すために、(2.4) 式の両辺に、左から v をかけてみましょう。内積は、ベクトルどうしの演算ですけど、(2.4) 式の右辺で、ベクトルなのは、大カッコ [] のなかだけで、[] のそとは、スカラー量であるコトに注意すると (定義より、 $v \cdot v = v^2$ であるので)、

$$\begin{aligned} v \cdot u &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2} \right) \left[v \cdot \omega + \left\{ -\frac{v \cdot \omega}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot \omega}{v^2} + 1 \right) \right\} v^2 \right] \\ \text{したがって} \quad v \cdot u &= \frac{v \cdot \omega + v^2}{1 + (v \cdot \omega/c^2)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

が得られます。この (2.5) 式を、(2.4) 式に代入して、まとめると、ただちに、

$$u = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 + (v \cdot \omega/c^2)} \left[\omega + \left\{ -\frac{v \cdot \omega}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot \omega}{v^2} + 1 \right) \right\} v \right] \quad (2.6)$$

となるコトが分かります。この (2.6) 式が、ココで求めたかった、「 k 系から見た質点の速度 u と、 κ 系から見た質点の速度 ω のあいだの関係」を表す公式——つまり、「一般の場合における『速度の合成則』」です。さらに、(2.6) 式を求めたのと同じ要領で、

$$\omega = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - (v \cdot u/c^2)} \left[u + \left\{ -\frac{v \cdot u}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v \cdot u}{v^2} - 1 \right) \right\} v \right] \quad (2.7)$$

と表せるコトも分かります。

□ちなみに、 $v = (v, 0, 0)$ 、および、 $\omega = (\omega_\xi, \omega_\eta, 0)$ という条件では、(2.6) 式より、

$$u_x = \frac{v + \omega_\xi}{1 + (v\omega_\xi/c^2)}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 + (v\omega_\xi/c^2)} \omega_\eta, \quad u_z = 0 \quad (2.8)$$

が導かれます。コレは、条件から明らかのように、 x 軸方向だけを特別扱った場合の、「速度の合成則」です。ほとんどの教科書や解説などに出てくるので、良く見慣れた、お馴染みの公式かも知れませんが、

■ところで、あとで使うコトになるので、ココで、(2.3a) 式に、(2.4) 式で求めた「速度の合成則」を代入してみましょう。すると、 $d\tau/dt$ は、

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2} \right) = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 + (v \cdot \omega/c^2)} \quad (2.9)$$

とも表せるコトが分かります。さらに、 $dt/d\tau$ も、同じようにして計算すると、

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(1 + \frac{v \cdot \omega}{c^2} \right) = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - (v \cdot u/c^2)} \quad (2.10)$$

と表せます。なお、当然ですけど、(2.9) 式と (2.10) 式は、「逆関数の微分公式」、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad \text{ただし} \quad y = f(x), \quad x = f^{-1}(y) \quad (2.11)$$

を満たしています。逆関数の微分公式は、高校の数学でも習うハズですけど、その発展版である「逆関数定理」は、とても奥が深くて、オモシロいと思うので、興味があれば、ぜひ、調べてみて下さいね。

■ 3. 加速度の変換式 —— 2 つの慣性系から見た加速度の関係

■次に、 k 系から見た質点の加速度 $a = (a_x, a_y, a_z)$ と、 κ 系から見た質点の加速度 $\alpha = (\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta)$ のあいだの関係を、考えてみましょう。定義より、 k 系から見た質点の加速度 a と、 κ 系から見た質点の加速度 α は、それぞれ、次のように、書くコトができます。

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 r_k}{dt^2}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{d^2 r_\kappa}{d\tau^2} \quad (3.1)$$

したがって、 k 系から見た質点の加速度 a は、先ほどと同じように、合成関数の微分の法則より、

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{du}{d\tau} = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 + (v \cdot \omega/c^2)} \frac{du}{d\tau} \quad (3.2)$$

と表せます (ココで、(2.9) 式を用いました)。さらに、 $du/d\tau$ は、(2.6) 式を τ で微分するコトにより、分数関数 (商で表される関数) の微分の公式を使って、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{\{1+(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}/c^2)\}^2} \left[\left\{ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} + \left(-\frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} \right) \mathbf{v} \right\} \left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \boldsymbol{\omega} + \left(-\frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{v^2} + 1 \right) \right) \mathbf{v} \right\} \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{\{1+(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}/c^2)\}^2} \left[\left\{ \boldsymbol{\alpha} + \left(-\frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{v^2} \right) \mathbf{v} \right\} \left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \boldsymbol{\omega} + \left(-\frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{v^2} + 1 \right) \right) \mathbf{v} \right\} \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{c^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

であるコトが分かるので（ココでは、(3.1)式を使いました）、結局、(3.2)式は、

$$\mathbf{a} = \frac{1-(v/c)^2}{\{1+(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}/c^2)\}^3} \left\{ \left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}{c^2} \right) \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{v^2} \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{v} \right\} \quad (3.4)$$

のように、まとめるコトができます。この(3.4)式が、ココで求めたかった、「 k 系から見た質点の加速度 \mathbf{a} と、 κ 系から見た質点の加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ のあいだの関係」を表す公式です（ちなみに、「速度の合成則」と違って、コチラの式には、一般的に通じる名前は、ないようです）。さらに、(3.4)式を求めたのと同じ要領で、

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1-(v/c)^2}{\{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}/c^2)\}^3} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2} \right) \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) \mathbf{u} - \frac{1}{v^2} \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) \mathbf{v} \right\} \quad (3.5)$$

と表せるコトも分かります。

□いま、考えている質点が、 κ 系に対して静止しているとしましょう。つまり、 κ 系から見た、この質点の速度 $\boldsymbol{\omega}$ は $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ となります。また、このとき、 k 系から見た、この質点の速度 \mathbf{u} は、 k 系から見た κ 系の速度 \mathbf{v} と、等しくなります。つまり、 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ となります。この場合には、 k 系から見た質点の加速度 \mathbf{a} と、 κ 系から見た質点の加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ のあいだの関係は、(3.4) ~ (3.5)式より、ただちに、

$$\mathbf{a} = \left\{ 1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right\} \left\{ \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{u^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2} \right) (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u} \right\} \quad (3.6a)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{1 - (u/c)^2} \left\{ \mathbf{a} + \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - 1 \right) (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}) \mathbf{u} \right\} \quad (3.6b)$$

となります。実は、特殊相対論の世界においても、（観測者から見て）質点が静止している場合に限れば、ニュートンの運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ が成り立ちます。すなわち、静止している質点に対しては、この質点にはたらく力 \mathbf{F} と、この質点を得る加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ が、単純に比例するのです。したがって、**特殊相対論の世界の力学を考えると**、まず最初に、対象となる質点に対して静止している慣性系（便宜上、「静止系」と呼ぶコトにします）を考えるコトが、大切になります。そして、この「静止系」で、運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ を適用して、対象となる質点を得る加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ を計算します。そうして求めた加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ を、(3.6a)式を使って、別の慣性系（ k 系）から見た加速度 \mathbf{a} と変換するのです。この方法を使えば、どの慣性系から見た、どんな質点の運動についても、計算するコトができる——というワケです。もちろん、質点が加速度を得れば、次の瞬間には、この「静止系」は、もはや、この質点に対して、静止していない——というコトになります。でも、時間が経過するにしたがって、次々と、「静止系」を乗り換えていけば（または、 k 系と κ 系のあいだの相対速度 $v = u$ が、時刻 t の関数 $u(t)$ になっていると考えれば）、任意の慣性系（任意の k 系）から見た、どんな質点の運動も、この方法で計算できる——というコトが、分かるでしょう。



■4. マクスウェル方程式のローレンツ変換 —— 2つの慣性系から見た電磁場の関係

■さて、次に、電磁気学の基礎方程式である「(真空中の) **マクスウェルの方程式**」に対して、ローレンツ変換を適用するコトを、考えてみたいと思います。でも、そのためには、準備が必要です。まずは、 k 系での偏微分と、 κ 系での偏微分のあいだの関係を、調べてみましょう。

■偏微分のローレンツ変換 ——

■例として、 t, x, y, z を変数とする任意の関数 $f(t, x, y, z)$ を、偏微分するコトを考えてみます。たとえば、関数 $f(t, x, y, z)$ を、変数 τ で偏微分すると、**合成関数の偏微分の法則**を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial \tau} &= \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.1)$$

となります。 $\partial t/\partial \tau, \partial x/\partial \tau, \partial y/\partial \tau, \partial z/\partial \tau$ は、(1.4a) ~ (1.4d)式から計算できて、たとえば、 $\partial t/\partial \tau$ の場合には、(1.4a)式の t を、 τ で偏微分すれば良いのですが、**偏微分は、考える変数（ココでは τ ）以外の変数を固定して（定数とみなして）、微分するコトに注意して、**ただちに、

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (4.2)$$

であるコトが分かります。同じようにして、 $\partial x/\partial \tau, \partial y/\partial \tau, \partial z/\partial \tau$ も計算してあげると、(4.1)式は、結局、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial \tau} &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial t} + \frac{v_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial x} \\ &\quad + \frac{v_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial y} + \frac{v_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\partial f(t, x, y, z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.3)$$

のように表せます。(4.3)式より、 κ 系における τ による偏微分 $\partial/\partial \tau$ は、 k 系にとっては、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.4)$$

という偏微分（演算）になる——というコトが分かります。同じ要領で計算するコトで、 κ 系における ξ, η, ζ による偏微分も、 k 系における偏微分（演算）に、変換するコトができます。

■ κ 系における偏微分と、 k 系における偏微分のあいだの変換式を計算する前に、表記の便宜上、

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (4.5)$$

という記号を、導入しておきましょう。これは、特殊相対論の計算をしていると、ホントに、とても、たくさん出てくるので、「**ローレンツ因子**」という特別な名前が付けられています。ちなみに、右辺の c は、光の速さ（光速）を表しているのだから、 $v < c$ より、ローレンツ因子 γ は、必ず、 $\gamma \geq 1$ となります。

■さて、 κ 系における偏微分と、 k 系における偏微分のあいだの変換式のハナシに戻りましょう。(4.4)式を導いたのと同じ要領で、 $\partial/\partial \xi, \partial/\partial \eta, \partial/\partial \zeta$ の変換式も、(1.4a) ~ (1.4d)式から計算できます。途中の計算は省略して、結果だけを、ローレンツ因子を用いて表すと、最終的には、 κ 系における偏微分を、 k 系における偏微分（演算）に変換する公式は、次のように、表されます。

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma v_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma v_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\gamma}{c^2} v_x \frac{\partial}{\partial t} + \left(1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\gamma}{c^2} v_y \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_y \frac{\partial}{\partial x} + \left(1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_y^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_y v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.6c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\gamma}{c^2} v_z \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_z \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_y v_z \frac{\partial}{\partial y} + \left(1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_z^2 \right) \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.6d)$$

■同様に、 k 系における偏微分を、 κ 系における偏微分（演算）に変換する公式は、次のように、表されます。
なお、ココでは、右辺を、 κ 系の記号で統一するために、 $\mathbf{v} = (v_\xi, v_\eta, v_\zeta)$ のほうの表記法を使いました。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial \tau} - \gamma v_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \gamma v_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \gamma v_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (4.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\gamma}{c^2} v_\xi \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\xi^2\right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\xi v_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\xi v_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (4.7b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\gamma}{c^2} v_\eta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\xi v_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\eta^2\right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\eta v_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (4.7c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\gamma}{c^2} v_\zeta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\xi v_\zeta \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\eta v_\zeta \frac{\partial}{\partial \eta} + \left(1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_\zeta^2\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (4.7d)$$

■真空中のマクスウェルの方程式 —

■ k 系と κ 系のあいだの偏微分の関係が分かったので、いよいよ、「（真空中の）マクスウェルの方程式」のハナシを、始めましょう。そもそも、「マクスウェルの方程式」とは、電場と磁場の振る舞いについての法則を表した方程式です。詳しい内容は、多くの教科書や解説などで、懇切丁寧に説明されていますので、ココでは、その表記法についてだけ、紹介したいと思います。

■マクスウェルの方程式を書くには、**ナブラベクトル** ∇ という新たな記号を導入すると、とても、便利です。ナブラベクトルは、次のように、定義されます。

$$\nabla_k \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \nabla_\kappa \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \quad (4.8)$$

ただし、ココで、 ∇_k は k 系におけるナブラベクトル、 ∇_κ は κ 系におけるナブラベクトルを表します（なお、通常は、考える座標系は明らかなので、 ∇ という記号は、添え字をつけずに書くことが多いです）。

■さて、マクスウェルの方程式には、いろいろな表記法がありますが、ココでは、国際単位系（SI）で、もっとも一般的な表記法を、紹介しましょう。いま、 k 系から見た電場を $\mathbf{E}_k = (E_x, E_y, E_z)$ と表して、磁場を $\mathbf{B}_k = (B_x, B_y, B_z)$ と表すと、 k 系における「（真空中の）マクスウェルの方程式」は、次のように、2通りの表記法（ナブラベクトル ∇ を使った表記法と、使わない表記法）で、書くことができます。

$$\nabla_k \cdot \mathbf{E}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (4.9a)$$

$$\nabla_k \cdot \mathbf{B}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.9b)$$

$$\nabla_k \times \mathbf{E}_k = -\frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \quad (4.9c)$$

$$\nabla_k \times \mathbf{B}_k = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \quad (4.9d)$$

ナブラベクトルと、ベクトルの内積・外積の定義を、巧みに利用して、右側のたくさんの複雑な方程式が、左側の4つの簡明な方程式に、書き直されているコトを、確認してみてください。

□ちなみに、これらの方程式のそれぞれが、現実の世界の、どんな物理現象を表しているのか、さらには、どんな物理現象に関わってくるのかは、とっても奥が深くて、ホントにオモシロいです。多くの電磁気学の教科書や解説などで、詳しく説明されているので、ぜひ、じっくりと勉強して、楽しんでみてください。

■ところで、「相対性の原理」より、 k 系で成り立つ物理法則は、 κ 系でも、まったく同じカタチで、成り立つコトが要求されます。なぜなら、相対性の原理によれば、特別な慣性系（特に、いわゆる「絶対静止系」）は、存在しないからです。つまり、 k 系から見れば、静止しているのは k 系で、 κ 系は運動している慣性系ですし、逆に、 κ 系から見れば、静止しているのは κ 系で、 k 系が運動している慣性系となります——というように、「静止」という概念は、あくまで、相対的なモノなのです。したがって、どんな物理法則が成り立っているかを調べるコトで、どの慣性系が絶対静止系なのかを、判断できてはいけな——というワケです。そのためには、どんな慣性系でも、物理法則は、まったく同じカタチをしていなければなりません。よって、 κ 系から見た電場を $\mathbf{E}_\kappa = (E_\xi, E_\eta, E_\zeta)$ とし、磁場を $\mathbf{B}_\kappa = (B_\xi, B_\eta, B_\zeta)$ とすると、 κ 系における「（真空中の）マクスウェルの方程式」は、次のように書けるハズです。

$$\nabla_\kappa \cdot \mathbf{E}_\kappa = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial E_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial E_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.10a)$$

$$\nabla_\kappa \cdot \mathbf{B}_\kappa = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial B_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial B_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial B_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.10b)$$

$$\nabla_\kappa \times \mathbf{E}_\kappa = -\frac{\partial \mathbf{B}_\kappa}{\partial \tau} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial E_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial E_\eta}{\partial \zeta} = -\frac{\partial B_\xi}{\partial \tau} \\ \frac{\partial E_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial E_\zeta}{\partial \xi} = -\frac{\partial B_\eta}{\partial \tau} \\ \frac{\partial E_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial E_\xi}{\partial \eta} = -\frac{\partial B_\zeta}{\partial \tau} \end{cases} \quad (4.10c)$$

$$\nabla_\kappa \times \mathbf{B}_\kappa = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_\kappa}{\partial \tau} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial B_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial B_\eta}{\partial \zeta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\xi}{\partial \tau} \\ \frac{\partial B_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial B_\zeta}{\partial \xi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\eta}{\partial \tau} \\ \frac{\partial B_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial B_\xi}{\partial \eta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\zeta}{\partial \tau} \end{cases} \quad (4.10d)$$

■ k 系と κ 系で、電場と磁場の関係を表すマクスウェルの方程式が同じカタチなのに、マクスウェルの方程式に含まれる偏微分が、(4.6a) ~ (4.7d) 式のような複雑な関係をしているというコトは、 k 系で観測される電場 \mathbf{E}_k 、磁場 \mathbf{B}_k と、 κ 系で観測される電場 \mathbf{E}_κ 、磁場 \mathbf{B}_κ が、同じではなく、複雑な関係をしているコトを、示唆しているように感じます。 k 系で観測される電場 \mathbf{E}_k 、磁場 \mathbf{B}_k と、 κ 系で観測される電場 \mathbf{E}_κ 、磁場 \mathbf{B}_κ のあいだに、どんな関係があるのか——次は、実際に、マクスウェルの方程式をローレンツ変換してみるコトで、その関係を、調べてみたいと思います。



■マクスウェル方程式のローレンツ変換 —

■では、早速、マクスウェルの方程式を、ローレンツ変換してみましょう。まずは、(4.9a) 式に、偏微分の変換法則（(4.7a) ~ (4.7d) 式）を当てはめてみます。とても長ったらしい式になりますが、 k 系と κ 系のあいだの相対速度 \mathbf{v} は、さしあたり、定ベクトル（各成分が定数であるベクトル）とみなして、ベクトル \mathbf{v} の成分は、 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_\xi, v_\eta, v_\zeta)$ と書けたコトと、ベクトルの内積の定義を思い出しつつ、なんとか、頑張っ、式変形をしてみると、次のように、比較的、見通しの良いカタチにまとめることができます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ E_x + \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_x \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ E_y + \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_y \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ E_z + \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_z \right\} \\ = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

■さらに、同じ要領で、(4.9d) 式としてまとめられている 3 つの式も、それぞれを、ローレンツ変換すると (今度は、ベクトルの外積の定義も思い出しして)、次のように、書き表すことができます。

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ B_z + \frac{\gamma-1}{v^2} v_y (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_x + \frac{\gamma}{c^2} v_y E_x \right\} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ B_y - \frac{\gamma-1}{v^2} v_z (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_x - \frac{\gamma}{c^2} v_z E_x \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\gamma-1}{v^2} v_x (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_x + \frac{\gamma}{c^2} v_x E_x \right\} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \gamma E_x + \gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_x \right\} \quad (4.12a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ B_x + \frac{\gamma-1}{v^2} v_z (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_y + \frac{\gamma}{c^2} v_z E_y \right\} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ B_z - \frac{\gamma-1}{v^2} v_x (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_y - \frac{\gamma}{c^2} v_x E_y \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\gamma-1}{v^2} v_y (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_y + \frac{\gamma}{c^2} v_y E_y \right\} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \gamma E_y + \gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_y \right\} \quad (4.12b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ B_y + \frac{\gamma-1}{v^2} v_x (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_z + \frac{\gamma}{c^2} v_x E_z \right\} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ B_x - \frac{\gamma-1}{v^2} v_y (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_z - \frac{\gamma}{c^2} v_y E_z \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\gamma-1}{v^2} v_z (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_z + \frac{\gamma}{c^2} v_z E_z \right\} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \gamma E_z + \gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_z \right\} \quad (4.12c)$$

□ちなみに、 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_x$ は、ベクトル $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k$ の x 成分 (つまり、 $v_y B_z - v_z B_y$) を表します。もちろん、 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_y$ は $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k$ の y 成分を表し、 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_z$ は $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k$ の z 成分を表しています。

■ココで、少し、技巧的になりますけど、(4.12a) 式の両辺に v_x 、(4.12b) 式の両辺に v_y 、(4.12c) 式の両辺に v_z を、それぞれ、かけます。そうしてから、コレら 3 つの式を足し合わせて、頑張って整理すると、次の関係式が得られます。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_x - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_x \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_y - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_y \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_z - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_z \right\} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \quad (4.13)$$

□実は、(4.13) 式の導出過程で、 τ, ξ, η, ζ のすべての偏微分の被微分部分に、 $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)$ という項が現れます。コレは、ベクトル解析の公式 $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 、および、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ より、 $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) = \mathbf{B}_k \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{0} = 0$ となり、消えてしまいます。

■(4.11) 式と (4.13) 式では、右辺が一致しているというコトに気がつきます。そこで、(4.11) 式の右辺に、(4.13) 式の左辺を代入して、整理すると、次の式が得られます。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ E_x - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_x \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ E_y - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_y + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_y \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ E_z - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) v_z + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)_z \right\} = 0$$

したがって $\nabla_\kappa \cdot \left\{ \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \right\} = 0 \quad (4.14)$

□このとき、ローレンツ因子 γ が、(4.5) 式で定義されていたコトを、思い出しましょう。つまり、

$$\frac{\gamma-1}{v^2} - \frac{\gamma}{c^2} = \frac{1}{v^2} \left\{ \gamma - 1 - \gamma \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\} = \frac{1}{v^2} \left\{ \gamma \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) - 1 \right\} = \frac{1}{v^2} \left\{ \gamma \left(\frac{1}{\gamma^2} \right) - 1 \right\} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) = -\frac{1}{v^2} \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad (4.15)$$

という変形が、(4.14) 式の導出過程で使われています。このような変形は、これからも、随所に、たくさん使われますので、ぜひ、慣れておいて、使える場面を逃さないよう、嗅覚を鍛えて下さいね。

■さて、ココまで計算したトコロで、あらためて、 κ 系におけるマクスウェルの方程式のなかの、 $\nabla_\kappa \cdot \mathbf{E}_\kappa = 0$ という関係式 ((4.10a) 式) を、思い出しましょう。この関係式を、(4.14) 式と見比べると、 κ 系から見た電場 \mathbf{E}_κ は、(4.14) 式のカッコ部分の定数倍に等しい、つまり、さしあたって、 λ を未知の定数として、

$$\mathbf{E}_\kappa = \lambda \left\{ \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \right\} \quad (4.16)$$

という関係が成り立っていないと分かります ((4.14) 式の右辺が 0 なので、左辺を定数倍しても、等式が成り立つコトに注意！)。したがって、 k 系において観測される電場と磁場が、それぞれ \mathbf{E}_k と \mathbf{B}_k であるとき、 κ 系で観測される電場 \mathbf{E}_κ は、(4.16) 式で与えられる——というコトになるワケです。

■まったく同じ要領で、(4.9b) 式と (4.9c) 式から、さしあたって、 θ を未知の定数として、

$$\mathbf{B}_\kappa = \theta \left\{ \mathbf{B}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_k) \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_k) \right\} \quad (4.17)$$

を導くコトができます (なお、未知定数 λ, θ は、どちらも、スカラー量であるコトに注意しましょう)。

■ココまでの議論で、 k 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k$) と、 κ 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_\kappa, \mathbf{B}_\kappa$) のあいだの関係が、とりあえず、(4.16) 式と (4.17) 式で、与えられました。あとは、未知のまま残っている 2 つの定数 λ, θ さえ決定できれば、 k 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k$) と、 κ 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_\kappa, \mathbf{B}_\kappa$) の関係が、完全に解明できるコトになります。最後に、この 2 つの定数を、決定しましょう。

■ 2 つの慣性系から見た電磁場の関係 —

■まず、未知の定数 λ, θ は、コレまでに出てきた偏微分に対する振る舞いから、変数 t, x, y, z に依存しない——というコトは明らかです。けれども、ココまでの議論では、まだ、 k 系と κ 系のあいだの相対速度 v にも依存しないとは、断言できません。そこで、さしあたって、 $\lambda = \lambda(v)$ 、および、 $\theta = \theta(v)$ と書くコトにします。また、(4.16) 式と (4.17) 式は、既知のベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k$ を与えると、ベクトル $\mathbf{E}_\kappa, \mathbf{B}_\kappa$ が、それぞれ、導けるような関数を表している——と、みなせます。そこで、さしあたって、 $\mathbf{E}_\kappa = \mathbf{E}_\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k)$ 、および、 $\mathbf{B}_\kappa = \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k)$ と書くコトにします。まとめると、(4.16) 式と (4.17) 式は、次のようになります。

$$\mathbf{E}_\kappa = \mathbf{E}_\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k) = \lambda(v) \left\{ \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \right\} \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{B}_\kappa = \mathbf{B}_\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k) = \theta(v) \left\{ \mathbf{B}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_k) \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_k) \right\} \quad (4.18b)$$

■ココで、ちょっとした思考実験を考えてみましょう。まず最初に、 k 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k$) を、 k 系から見て速度 v で運動している κ 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_\kappa, \mathbf{B}_\kappa$) に、変換します。次に、この κ 系を、あらためて、 k' 系として、 k' 系から見て速度 $-v$ で運動している慣性系 (κ' 系) を考えます。 κ' 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_{\kappa'}, \mathbf{B}_{\kappa'}$) は、(4.18a) ~ (4.18b) 式の $\mathbf{E}_\kappa, \mathbf{B}_\kappa$ に、 k' 系で観測される電場と磁場を代入すれば、求めるコトができます (ただし、 v のトコロは、 $v \rightarrow -v$ としなければいけませんけど)。

■ところで、良く考えると、 κ' 系は、もともとの k 系と、同じモノです。すなわち、「 k 系から見て速度 v で運動している慣性系 (κ 系 = k' 系) から見て速度 $-v$ で運動している慣性系 (κ' 系)」というのは、結局は、 κ 系 = k' 系を経由して、もとの k 系に戻っただけ——というワケです。したがって、 κ' 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_{\kappa'}, \mathbf{B}_{\kappa'}$) は、 k 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k$) と、同じになっているはず。このコトを、式で表すと、(4.18a) ~ (4.18b) 式の表記を用いて、

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_{\kappa'} = \mathbf{E}_\kappa(-v, \mathbf{E}_k(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k), \mathbf{B}_k(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k)) \quad (4.19a)$$

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{\kappa'} = \mathbf{B}_\kappa(-v, \mathbf{E}_k(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k), \mathbf{B}_k(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k)) \quad (4.19b)$$

と書くコトができます。まず、(4.19a) 式について、計算しましょう。(4.18a) ~ (4.18b) 式より、

$$\mathbf{E}_k = \lambda(-v) \left[\left\{ \lambda(v) \left(\mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \right) \right\} - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} \left(-v \cdot \left\{ \lambda(v) \left(\mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \right) \right\} \right) (-v) + \left(-v \times \left\{ \theta(v) \left(\mathbf{B}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_k) \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_k) \right) \right\} \right) \right] \quad (4.20)$$

となりますけど、ベクトル量とスカラー量の区別に注意しながら、まとめてみると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= \left\{ \lambda(-\mathbf{v})\lambda(\mathbf{v}) - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \lambda(-\mathbf{v})\theta(\mathbf{v}) \right\} \mathbf{E}_k \\ &+ \left\{ -\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2 v^2} \lambda(-\mathbf{v})\lambda(\mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} \lambda(-\mathbf{v})\theta(\mathbf{v}) \right\} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} \\ &+ \left\{ \lambda(-\mathbf{v})\lambda(\mathbf{v}) - \lambda(-\mathbf{v})\theta(\mathbf{v}) \right\} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \end{aligned} \quad (4.21)$$

という関係が導かれます (計算では、ベクトル解析の公式 $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ 、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 、および、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ 、さらに、定義 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$ を、使いました)。 (4.21) 式の両辺の係数を比較すると、ただちに、以下の関係が成り立っていないといけないコトが、分かります。

$$\lambda(-\mathbf{v})\lambda(\mathbf{v}) - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \lambda(-\mathbf{v})\theta(\mathbf{v}) = 1 \quad (4.22a)$$

$$-\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2 v^2} \lambda(-\mathbf{v})\lambda(\mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} \lambda(-\mathbf{v})\theta(\mathbf{v}) = 0 \implies \lambda(\mathbf{v}) = \theta(\mathbf{v}) \quad (4.22b)$$

$$\lambda(-\mathbf{v})\lambda(\mathbf{v}) - \lambda(-\mathbf{v})\theta(\mathbf{v}) = 0 \implies \lambda(\mathbf{v}) = \theta(\mathbf{v}) \quad (4.22c)$$

(4.22a) ~ (4.22c) 式より、ただちに、

$$\lambda(-\mathbf{v})\lambda(\mathbf{v}) = \frac{1}{1-(v/c)^2} = \gamma^2 \quad (4.23)$$

であるコトが分かりました。ちなみに、まったく同様にして、 (4.19b) 式より、

$$\theta(-\mathbf{v})\theta(\mathbf{v}) = \gamma^2 \quad (4.24)$$

であるコトも分かります。

■さて、ココまで、2つの慣性系のあいだの相対速度を、 \mathbf{v} にしたり、 $-\mathbf{v}$ にしたりして、長々と計算してきたワケですけど、ココで、あらためて、「符号の意味」について、考えてみましょう。そもそも、どちらの向きを「正の向き」にするのかは、人間が、勝手に決めるコトです。2つの慣性系のあいだの相対速度が、 \mathbf{v} なのか、 $-\mathbf{v}$ なのかで、物理法則そのものが、変わってしまうというコトは、ありえません。どういうコトかという、ある慣性系 (k 系) に対して、右向きに進んでいる観測者と、左向きに進んでいる観測者とで、まったく異なる物理法則が観測されたら、オカシイ——というコトです。もちろん、どちらかの向きを、「正の向き」と決める以上は、 \mathbf{v} に関する符号が違うのは、当然です。けれど、それ以外の部分に関しては、どちらに進んでいても、物理法則のカチは、同じであるハズです。このハナシを踏まえて、 k 系において、電場だけが観測されるとき (すなわち、 $\mathbf{B}_k = 0$ であるとき)、 k 系に対して速度 \mathbf{v} で進んでいる観測者と、速度 $-\mathbf{v}$ で進んでいる観測者が、それぞれ観測する電場を、考えてみましょう。 (4.18a) 式に、 \mathbf{v} と $-\mathbf{v}$ を代入して、見比べてみると、

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{0}) = \lambda(\mathbf{v}) \left\{ \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} \right\} = \lambda(\mathbf{v}) \widetilde{\mathbf{E}}_k \quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(-\mathbf{v}, \mathbf{E}_k, \mathbf{0}) &= \lambda(-\mathbf{v}) \left\{ \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) (-\mathbf{v}) \right\} \\ &= \lambda(-\mathbf{v}) \left\{ \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{\gamma v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} \right\} = \lambda(-\mathbf{v}) \widetilde{\mathbf{E}}_k \end{aligned} \quad (4.25b)$$

となります (ココで、便宜的に、新たな記号 $\widetilde{\mathbf{E}}_k$ を、導入しました)。最初に強調しておいたように、 $\lambda(\mathbf{v})$ はスカラー量です。したがって、 $\lambda(\mathbf{v})\widetilde{\mathbf{E}}_k$ は、ベクトル \mathbf{v} とベクトル $\widetilde{\mathbf{E}}_k$ のなす角度には関係なく、ただ単純に、ベクトル $\widetilde{\mathbf{E}}_k$ のスカラー倍 ($\lambda(\mathbf{v})$ 倍) の長さのベクトルを、意味します。そのコトを踏まえて、あらためて、(4.25a) 式と (4.25b) 式を、見比べてみましょう。仮に、 $\lambda(\mathbf{v})$ と $\lambda(-\mathbf{v})$ が、違う値とすると、たとえば、静止していた観測者が、同じ速さ $v = |\pm\mathbf{v}|$ で、正の向き (+ \mathbf{v}) に進むか、負の向き ($-\mathbf{v}$) に進むかで、観測される電場の大きさが異なる——というコトになります。けれど、どちらの向きを「正の向き」にするのかは、人間が、勝手に決めたコトだったハズ。「やっぱり、こっちの向きを、正の向きにする！」と言って、勝手に、向きを決め直したら、どうなるんだ?——というコトになってしまいます。結局、「仮に、 $\lambda(\mathbf{v})$ と $\lambda(-\mathbf{v})$ が、違う値とする」という、最初の仮定が、間違っていた——というコトです。したがって、

$$\lambda(\mathbf{v}) = \lambda(-\mathbf{v}) \quad (4.26)$$

でなければいけない——というコトになります。まったく同じ理屈で、次の関係も、導かれます。

$$\theta(\mathbf{v}) = \theta(-\mathbf{v}) \quad (4.27)$$

■ (4.23) ~ (4.24) 式、および、 (4.26) ~ (4.27) 式より、最終的に、

$$\lambda(\mathbf{v}) = \lambda(-\mathbf{v}) = \theta(\mathbf{v}) = \theta(-\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma \quad (4.28)$$

であるコトが分かります。よって、 (4.18a) ~ (4.18b) 式より、

$$\mathbf{E}_k = \gamma \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} + \gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \quad (4.29a)$$

$$\mathbf{B}_k = \gamma \mathbf{B}_k - \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_k) \mathbf{v} - \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_k) \quad (4.29b)$$

となります。当然、まったく同じ要領で、次の関係 (逆変換) も、導くコトができます。

$$\mathbf{E}_k = \gamma \mathbf{E}_k - \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_k) \mathbf{v} - \gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_k) \quad (4.30a)$$

$$\mathbf{B}_k = \gamma \mathbf{B}_k - \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_k) \mathbf{v} + \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_k) \quad (4.30b)$$

(4.29a) ~ (4.30b) 式こそ、この節で求めたかった、 k 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k$) と、 k 系から見て速度 \mathbf{v} で運動している κ 系で観測される電場と磁場 ($\mathbf{E}_\kappa, \mathbf{B}_\kappa$) のあいだの関係——その最終的なカチです。これらの関係を用いれば、任意の慣性系で観測される電場と磁場が、別の任意の慣性系では、どのように観測されるのかを、知るコトができます。さらに、重要なコトとして、任意の電荷に対して、ある任意の慣性系で観測される「この電荷にはたらく力」と、別の任意の慣性系で観測される「この電荷にはたらく力」のあいだの関係を、知るコトもできるのです。これは、「特殊相対論的に正しい運動方程式」を考えるときに、とって大きな手がかりとなります。

□蛇足ですけど、 (4.28) 式では、 (4.23) ~ (4.24) 式、および、 (4.26) ~ (4.27) 式より、

$$\lambda(\mathbf{v}) = \lambda(-\mathbf{v}) = \theta(\mathbf{v}) = \theta(-\mathbf{v}) = -\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = -\gamma \quad (4.31)$$

という解も、当然、数学的には、許されます。けれど、現実的に考えると、コレでは、観測者が、少しでも動いたら、観測される電場や磁場が、突然、逆向きになってしまう——というコトになります。もちろん、そんなコトは、いくらナンでも、ありえません。そんなワケで、 (4.28) 式では、 $\lambda, \theta > 0$ であるような解だけを、採用したのです。

□ちなみに、 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ という条件では、 (4.29a) ~ (4.29b) 式より、ただちに、

$$E_\xi = E_x, \quad E_\eta = \gamma(E_y - vB_z), \quad E_\zeta = \gamma(E_z + vB_y) \quad (4.32a)$$

$$B_\xi = B_x, \quad B_\eta = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad B_\zeta = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \quad (4.32b)$$

あるいは、 (4.30a) ~ (4.30b) 式より、ただちに、

$$E_x = E_\xi, \quad E_y = \gamma(E_\eta + vB_\zeta), \quad E_z = \gamma(E_\zeta - vB_\eta) \quad (4.33a)$$

$$B_x = B_\xi, \quad B_y = \gamma\left(B_\eta - \frac{v}{c^2}E_\zeta\right), \quad B_z = \gamma\left(B_\zeta + \frac{v}{c^2}E_\eta\right) \quad (4.33b)$$

が導かれます。コレらは、条件から明らかなように、 x 軸方向だけを特別扱いした場合の、「電場と磁場のローレンツ変換」です。ほとんどの教科書や解説などに出てくるので、良く見慣れた、お馴染みの公式かも知れませんが、



■ 5. 特殊相対論的に正しい運動方程式 — ニュートンの運動方程式のローレンツ変換

■ ココで、いよいよ、「特殊相対論的に正しい運動方程式」について、考えてみましょう。当然、特殊相対論の世界では、「ニュートンの運動方程式 ($m\alpha = F$)」が、そのままのカチで、成り立っているというコトは、期待できません。まったく同じ質点の運動を観測したとしても、異なる慣性系 (k 系と κ 系) にいる観測者が観測する加速度 (a と α) は、(3.4) 式と (3.5) 式のように、とても複雑な関係をしているからです。

□ ちなみに、ニュートン=ガリレイの相対論の世界では、まったく同じ質点の運動を観測する場合、異なる慣性系 (k 系と κ 系) にいる観測者が観測する加速度 (a と α) は、必ず、等しくなる ($a = \alpha$ となる) というコトが、簡単な計算から、分かります。

■ でも、ちょっと待って下さい。ニュートンの運動方程式は、1687年に刊行された『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』以来、現在に至るまで、あらゆる分野で、絶大な威力を発揮し続けています。建造物の設計から、宇宙船の軌道まで、今でも、すべて、ニュートンの運動方程式を使って、計算されているのです。そんなニュートンの運動方程式が、まったく、完全に間違っている——などというコトも、また、考えられません。

■ 考えられるのは、ニュートンの運動方程式は、あくまで、観測者から見た質点の速さ (u 、または、 ω) が、光の速さ c に比べて、十分に遅いとき ($u \ll c$ 、または、 $\omega \ll c$ のとき) だけに成り立つような、近似式である——という可能性です。さらに、推し進めて考えるならば、「特殊相対論的に正しい運動方程式」は、 $u \rightarrow 0$ 、または、 $\omega \rightarrow 0$ の極限で、ニュートンの運動方程式と同じカチになるはず——というコトになります。

■ そこで、いま、考える質点は、 κ 系に対して静止している ($\omega = 0$) としましょう。先ほどの考察によれば、このとき、 κ 系にいる観測者にとって、この質点は、ニュートンの運動方程式 $m\alpha = F_\kappa$ に従って運動するはずです (F_κ は、 κ 系から見た、この質点にはたらく力)。一方で、 k 系にいる観測者から見た場合、この質点の速度 u は、 k 系から見た κ 系の相対速度 v と等しくなります (すなわち、 $u = v \neq 0$ です)。以上、コレらのハナシを踏まえたと、……

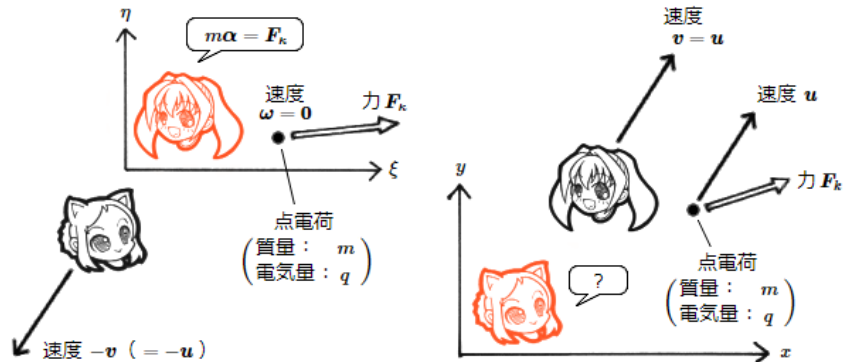
【1】 κ 系では、この質点 (κ 系に対して静止している質点) に対して、ニュートンの運動方程式 $m\alpha = F_\kappa$ が成り立つ。

【2】 この運動方程式 $m\alpha = F_\kappa$ をローレンツ変換して、 k 系では、この方程式が、どんなカチになるのかを調べる。 k 系にいる観測者から見ると、質点は、ココで求めた新たな方程式に従って、運動しているはず。

【3】 【2】 で求めた方程式こそが、質点が静止していないとき (すなわち、観測者から見た質点の速度 u が、 $u \neq 0$ のとき) にも成り立つ運動方程式、つまり、「特殊相対論的に正しい運動方程式」になっているはず。——という戦略で、「特殊相対論的に正しい運動方程式」を求めるコトが、できるに違いありません。

■ κ 系にいる観測者 (ありさ) から見た場合

■ k 系にいる観測者 (リトコ) から見た場合



■ それでは、早速、この戦略を実行してみましょう——と言いたいココですけど、1つ、とても重大な問題が残っています。ニュートンの運動方程式 $m\alpha = F_\kappa$ において、加速度 α については、すでに、(3.6b) 式で、ローレンツ変換した結果が、分かっています。でも、力 F_κ のローレンツ変換のほうは、いったい、どうすれば良いのでしょうか。高校までの知識に基づいて、「力 F_κ は、一般に、3次元のベクトルである」と考えると、これをローレンツ変換する方法は、ちょっと、なさそうです。でも、実は、すでに、ローレンツ変換した結果の分かっている「力」が、1つだけ、あります。それは、電気力=クーロン力 $F_\kappa = qE_\kappa$ (q は、電気量) です。つまり、 κ 系にいる観測者にとって、 κ 系に対して静止している点電荷 (質量 m 、電気量 q) は、ニュートンの運動方程式 $m\alpha = qE_\kappa$ に従うワケですけど、この $m\alpha = qE_\kappa$ ならば、簡単に、ローレンツ変換を実行するコトができます。電場 E_κ をローレンツ変換した結果は、(4.29a) 式で、すでに分かっているからです。

□ ちなみに、「電荷密度 ρ が存在する場合の、(真空中の) マクスウェルの方程式」を、ローレンツ変換するコトで、 k 系にいる観測者と、 k 系から見て速度 v で運動している κ 系にいる観測者が、同じ電荷を観測するとき、 k 系で観測される電気量 q_k と、 κ 系で観測される電気量 q_κ は、必ず、等しい ($q_k = q_\kappa$) というコトが、簡単に証明できます。質量のほうは、簡単ではありませんけど、同じ物体を観測するとき、 k 系で観測される質量 m_k と、 κ 系で観測される質量 m_κ は、必ず、等しい ($m_k = m_\kappa$) と考えるコトが、自然で合理的である——と、さまざまな方法で、示すコトができます。そのため、ココでは、 $q = q_k = q_\kappa$ 、および、 $m = m_k = m_\kappa$ として、問題はないワケです。安心して、ローレンツ変換を実行して下さい。

■ 以上の議論に基づいて、実際に、「特殊相対論的に正しい運動方程式」を考えてみます。まず、いま、考える点電荷 (質量 m 、電気量 q) は、 κ 系に対して静止しているとしましょう。この場合は、 κ 系から見て、この点電荷は、ニュートンの運動方程式 $m\alpha = F_\kappa$ に従うと考えられます。また、この点電荷にはたらく力 F_κ は、電場 E_κ から受ける力 (qE_κ) だけであるとしましょう。このとき、 κ 系から見ると、この点電荷に対して、次のカチの運動方程式が、成り立っているはずです。

$$m\alpha = qE_\kappa \quad (5.1)$$

■ この (5.1) 式に対して、いま、 $\omega = 0$ 、および、 $u = v$ という設定であるコトに注意しながら、(3.6b) 式と (4.29a) 式を使って、ローレンツ変換すると、

$$m\gamma_u^2 \left\{ a + \frac{\gamma_u - 1}{u^2} (u \cdot a) u \right\} = q \left\{ \gamma_u E_\kappa - \frac{\gamma_u - 1}{u^2} (u \cdot E_\kappa) u + \gamma_u (u \times B_\kappa) \right\} \quad (5.2)$$

$$\text{ただし } \gamma_u \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (5.3)$$

となります。ココで、両辺に u をかけると (ベクトル解析の公式 $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$ 、および、 $A \times A = 0$ も用いて)、ただちに、

$$u \cdot E_\kappa = \frac{m\gamma_u^3}{q} (u \cdot a) \quad (5.4)$$

であるコトが分かります。コレを、(5.2) 式に代入して、整理すると、

$$m \left\{ \gamma_u \frac{du}{dt} + \frac{\gamma_u^3}{c^2} (u \cdot \frac{du}{dt}) u \right\} = q \left\{ E_\kappa + (u \times B_\kappa) \right\} \quad (5.5)$$

が得られます (ココで、(5.3) 式より $\gamma_u^2 - 1 = (\gamma_u u/c)^2$ 、および、(3.1) 式の $a = du/dt$ を使いました)。

■ とここで、 γ_u を t で微分すると、(5.3) 式より ($u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u \cdot u$ であるコトに注意して)、

$$\frac{d\gamma_u}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right) = \frac{\gamma_u^3}{c^2} \left(u \cdot \frac{du}{dt} \right) \quad (5.6)$$

となります。積の微分法則を思い出しながら、(5.5) 式を見直してみると、(5.5) 式の左辺は、 γ_u と u の積を t で微分したモノであるコトに、気がつきます。つまり、(5.5) 式は、(5.6) 式より、

$$m \left(\gamma_u \frac{du}{dt} + \frac{d\gamma_u}{dt} u \right) = m \frac{d}{dt} (\gamma_u u) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right) = q \left\{ E_\kappa + (u \times B_\kappa) \right\} \quad (5.7)$$

と表せます。この (5.7) 式こそが、 k 系から見た、点電荷が従う運動方程式——すなわち、「特殊相対論的に正しい運動方程式」というコトになります。

■ もちろん、考える点電荷が、 k 系に対して静止していると考えて、 $ma = qE_k$ を、ローレンツ変換するコトで (この場合は、 $u = 0$ 、および、 $\omega = -v$ という設定になるコトに注意すると)、 κ 系から見た、点電荷が従う運動方程式が、

$$m \frac{d}{dt} (\gamma_\omega \omega) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - (\omega/c)^2}} \right) = q \left\{ E_\kappa + (\omega \times B_\kappa) \right\} \quad (5.8)$$

$$\text{ただし } \gamma_\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/c)^2}} \quad (5.9)$$

となるコトも示せます。(5.7) 式と (5.8) 式を見比べてみると、 k 系と κ 系で、点電荷が従う運動方程式のカチが、同じになっている——すなわち、相対性の原理を、ちゃんと、満たしているコトが分かります。

■ さて、「特殊相対論的に正しい運動方程式」として、(5.7) 式や (5.8) 式が導かれましたけど、コレらの式のかなかに、 k 系と κ 系のあいだの相対速度 v が、含まれていないコトは、とても重要です。コレは、考える点電荷が、どの慣性系に対して静止しているのかには関係なく、(5.7) 式や (5.8) 式のカチの方程式が、成り立っているというコトを意味しています。すなわち、(5.7) 式や (5.8) 式のカチの方程式は、どんな慣性系でも成り立つ、「特殊相対論的に正しい運動方程式」なのです。つまり、任意の慣性系にいる観測者は、ただ、(5.7) 式に、自分の観測値を代入すれば、どんな点電荷の運動も、計算するコトができるのです。

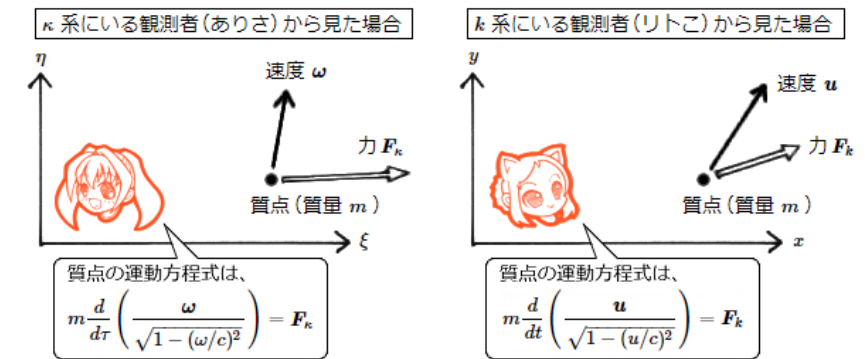
■ 6. 特殊相対論的に正しい運動力学 —— 特殊相対論的な「運動量」と「エネルギー」

■さて、前の節では、電磁気力だけがはたらいている場合について、「特殊相対論的に正しい運動方程式」を、求めることができました。そうすると、「この運動方程式は、電磁気力だけではなく、あらゆる力についても、そのまま、成り立つのではないだろうか」と考えるのは、自然な発想です。つまり、**任意の慣性系にいる観測者から見て、速度 u で運動する、質量 m の質点に、力 F_k がはたらいているとき、この質点は、**

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) = \mathbf{F}_k \quad \text{または} \quad m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \right) = \mathbf{F}_k \quad (6.1)$$

という運動方程式に従って運動する——と言えるに違いありません。そして、実際に、マクスウェルの方程式を使わずに、「運動量の保存則」と「速度の合成則」だけを用いて、直接、(6.1)式のカチの「特殊相対論的に正しい運動方程式」を導くことができます（多くの教科書や解説などでは、コチラの方法で、「特殊相対論的に正しい運動方程式」を導いているようです）。他にも、あらゆる理論的な考察において、(6.1)式こそが、「特殊相対論的に正しい運動方程式」である——というコトが、示されます。

観測者がどんな慣性系にいても、質点がどんな運動をしていても、同じ運動方程式が成り立つよ!



■ニュートンの運動方程式と比べて、「特殊相対論的に正しい運動方程式」のポイントは、**質点にはたらく力 F (直接的に) 影響を及ぼすのは、質点の速度 u の時間変化 (= 加速度 a) ではなくて、質点の $u/\sqrt{1-(u/c)^2}$ という量の時間変化である——**というコトです。 $u/\sqrt{1-(u/c)^2}$ という物理量は、直感的にイメージできるモノではないので、このコトは、なかなか、すんなりと納得するのが難しいかも知れません。ちなみに、もちろん、質点の速度の大きさ u が、光速 c に比べて十分に小さいときには、「特殊相対論的に正しい運動方程式」は、ニュートンの運動方程式と同じになります ((6.1) 式において、 $(u/c)^2 \approx 0$ とみなせる場合になります)。

□直感的にイメージするコトが難しいからか、奇妙な解釈が生まれました。まず、(6.1)式の左辺を、

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \mathbf{u} \right) \quad (6.2)$$

のように(わざわざ、不自然に)変形します。ココで、新たな物理量 m' を、

$$m' \equiv \frac{m}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad (6.3)$$

と定義すれば、「特殊相対論的に正しい運動方程式」は、

$$\frac{d}{dt} (m' \mathbf{u}) = \mathbf{F}_k \quad (6.4)$$

と表せます。コレは、一見、ニュートンの運動方程式と同じで、とても分かりやすいカタチです。そこで、ニュートンの運動方程式 ((5.13) 式) における質量 m に対応する、この m' ((6.3) 式) は、「(質点の運動の速さ u に依存する) 相対論的質量」と名付けられました。さらには、「実際に、質点の質量は、質点の運動の速さ u に依存して、変化するので、速く運動する質点ほど、その質量は大きくなる」という解釈が、生まれました。この解釈は、今でも、一般に広まっているようです。

□この解釈が、不自然で、非合理的であるというコトは、(5.13) ~ (5.15) 式の議論を見てきたなら、理解できるでしょう。つまり、この解釈における「特殊相対論的に正しい運動方程式」は、(5.14)式が成り立たなければならず、(5.15)式は成り立ちません。この結果は、本来のニュートンの運動方程式の正しい解釈とは、まったく逆です。すなわち、(6.2)式の式変形が不自然というだけでなく、ニュートンの運動方程式との比較・類推でも、「相対論的質量」の概念・解釈は、**非合理的と言わざるをえません。**

■なお、当然のコトですけど、(5.7)式をローレンツ変換すると、(5.8)式が導かれます。また、(5.8)式をローレンツ変換すると、(5.7)式が導かれます (ちょっとメンドクさいですけど、計算自体は簡単です)。つまり、「**特殊相対論的に正しい運動方程式**」は、**ローレンツ変換に対して、そのカタチを変えない——**というコトが、分かります (ちなみに、この性質を、専門用語で、「**ローレンツ不変性**」と呼びます)。

□(5.7)式のカチの運動方程式は、のちの重要な議論のために、便宜上、質量 m を定数とみなして、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) = q \{ \mathbf{E}_k + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_k) \} \quad (5.10)$$

と書くコトが多いです。このように書かれた式を見て、たとえば、アルファ崩壊や対消滅のような、質量が変化する (ように見える) 現象に対して、うっかり、積の微分法則を使って、

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) + \frac{dm}{dt} \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = q \{ \mathbf{E}_k + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_k) \} \quad (5.11)$$

という式が成り立つ——と思ってしまうかも知れません。でも、実際は、**(5.11)式は成り立ちません。** すぐ上で説明したとおり、(5.7)式は、ローレンツ変換に対して、そのカタチを変えません。すなわち、ローレンツ不変性が成り立っています。でも、(5.11)式をローレンツ変換すると、

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \right) + \frac{dm}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} + \frac{\sqrt{1-(\omega/c)^2}}{1+(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}/c^2)} \frac{dm}{dt} = q \{ \mathbf{E}_k + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_k) \} \quad (5.12)$$

となって、式のカチそのものが、変わってしまいます。すなわち、**(5.11)式は、ローレンツ不変性が成り立たないのです。**コレは、 k 系と κ 系で、点電荷が従う運動方程式が異なる——つまり、「**相対性の原理**」を満たさない——というコトを意味します。したがって、(5.11)式は、「**特殊相対論的に正しい運動方程式**」ではないコトが、分かります。質量が変化する (ように見える) 現象を考えるときには、増減した質量の行方を含めた、多体系の問題として、系全体の質点 (および、光子) の運動方程式を考える必要があるのです。詳しくは、次の節で、検討するコトにしましょう。

□余談ですけど、このハナシは、ニュートンの運動方程式 (非相対論的な運動方程式) の場合も、同様に、注意する必要があります。ニュートン自身は、まず、「運動量 $p = m\mathbf{u}$ 」を定義して、「質点の運動量 p の時間変化は、その質点にはたらく力 F に比例する」と述べました。現代風に、式で表すと、

$$\frac{dp}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{または} \quad \frac{d}{dt} (m\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (5.13)$$

となります。コレこそが、本来の「ニュートンの運動方程式」です。この式だけを見ると、数学的には、

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (5.14)$$

と考えるコトができそうです。でも、**物理的には、(5.14)式は間違いです。**(5.13)式は、あくまで、質量の変化しない ($dm/dt = 0$) の「質点」を想定した方程式なのです。質量の変化する「物体」を考える場合は、その「物体」を、たくさんの (質量の変化しない) 「質点」の集まりと、みなす必要があります。「物体」の質量が変化するの、その「物体」を構成する「質点」の一部が、離散・集合する結果であると考えるワケです。したがって、正しいニュートンの運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \text{「質点」が } N \text{ 個ある場合は } m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5.15)$$

となります。このように、「質点」が N 個ある場合には、運動方程式は N 本になります。つまり、 N 本の運動方程式からなる連立方程式を考えなければいけないのです。

□ちなみに、「質量が変化する (ように見える) 物体」と言えば、反動物質 (燃料とか) を噴射して、その反作用で加速するロケットを、思い浮かべるかも知れません。このようなロケットの運動は、(5.13)式 (運動量の保存則) と、「作用・反作用の法則」の、2つの法則**だけ**を使って、計算できます。計算の結果が、有名な「**ツィオルコフスキーの公式**」です。ところで、ツィオルコフスキーの公式を、(5.15)式に当てはめると、「ロケットエンジンの推力 (搭載燃料を含むロケット本体にはたらく力)」は、「反動物質の噴射速度」×「燃料消費速度 (単位時間当たりのロケットの質量減少量)」となるコトが、分かります。コレは、現実のロケットエンジンの実験結果と、とても良く一致します。でも、(5.14)式の解釈だと、ロケットエンジンは、ロケットの速さに比例して、推力が小さくなる——という、現実にはありえない結果になってしまいます。このコトからも、(5.14)式の解釈が、物理的には間違っていると、分かります。

□もちろん、うまく条件を揃えれば、(5.14)式が成り立ってしまう——というコトもあります。でも、それは、あくまでも、特別な状況です。(5.14)式が、常に成り立つワケではないので、要注意です。

■ 質点にはたらく力のローレンツ変換 —

■ さて、「特殊相対論的に正しい運動方程式」が分かったコトで、 k 系から見た力 F_k と、 κ 系から見た力 F_κ のあいだの関係を、知るコトができます。すなわち、「特殊相対論的に正しい運動方程式（(6.1)式）」を、（コレまで何回もやってきたのと同じ要領で）ローレンツ変換するコトで、ただちに、

$$F_\kappa = \frac{1}{\gamma(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)} \left[\mathbf{F}_k + \left\{ \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_k) - \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_k) \right\} \mathbf{v} \right] \quad (6.5a)$$

$$F_k = \frac{1}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}/c^2)} \left[\mathbf{F}_\kappa + \left\{ \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_\kappa) + \frac{\gamma}{c^2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{F}_\kappa) \right\} \mathbf{v} \right] \quad (6.5b)$$

という関係が成り立つコトが分かります（ちょっとメンドクさいですけど、計算自体は簡単です）。

□ ちなみに、 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ という条件では、(6.5a) ~ (6.5b) 式より、

$$\begin{aligned} F_\xi &= F_x - \frac{v/c^2}{1 - v u_x/c^2} (u_y F_y + u_z F_z), & F_x &= F_\xi + \frac{v/c^2}{1 + v \omega_\xi/c^2} (\omega_\eta F_\eta + \omega_\zeta F_\zeta) \\ F_\eta &= \frac{1}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} F_y, & F_y &= \frac{1}{\gamma(1 + v \omega_\eta/c^2)} F_\eta \\ F_\zeta &= \frac{1}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} F_z, & F_z &= \frac{1}{\gamma(1 + v \omega_\zeta/c^2)} F_\zeta \end{aligned} \quad (6.6)$$

となります。コレは、条件から明らかなように、 x 軸方向だけを特別扱った場合の、 k 系から見た力 F_k と、 κ 系から見た力 F_κ のあいだの関係です。この場合には、 x 軸方向と、それ以外の方向で、力の変換式のカチが異なるコトが分かります（ちなみに、このコトは、アインシュタインが、初めて、特殊相対論を発表したときに、「縦質量」「横質量」という概念を導入してしまった、遠因となりました）。

□ また、 k 系と κ 系のあいだの相対速度 \mathbf{v} の向きと、考える質点にはたらく力 F_k の向きが、揃っている場合（同じ向き、ないし、逆向きの場合）には——すなわち、 \mathbf{v} と F_k が平行である場合には、 $\mathbf{v} \times F_k = \mathbf{0}$ となるので、ベクトル解析の公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ より、(6.5a) 式は、

$$F_\kappa = F_k \quad (\mathbf{v} \text{ と } F_k \text{ が平行のとき}) \quad (6.7)$$

となるコトが分かります。つまり、**1次元の運動だけを考える限り、どんな慣性系から見ても、考える質点にはたらく力は、まったく同じになります**。したがって、質点の運動が、1次元だけに限られる場合には、同じ質点を、 k 系から見たときと、 κ 系から見たときの、それぞれの「特殊相対論的に正しい運動方程式」は、次のように書くコトができます。

$$k \text{ 系から見たとき (1次元の場合)} : m \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right) = F \quad (6.8a)$$

$$\kappa \text{ 系から見たとき (1次元の場合)} : m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - (\omega/c)^2}} \right) = F \quad (6.8b)$$

簡単な計算から、(6.8a) ~ (6.8b) 式は、次のように、変形できます。

$$k \text{ 系から見たとき (1次元の場合)} : \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{m}{1 - (u/c)^2} \frac{du}{dt} = F \quad (6.9a)$$

$$\kappa \text{ 系から見たとき (1次元の場合)} : \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/c)^2}} \frac{m}{1 - (\omega/c)^2} \frac{d\omega}{d\tau} = F \quad (6.9b)$$

この関係は、たとえば、直線運動するロケットの運動について、ロケットに乗っている観測者から見た場合と、地球上にいる観測者から見た場合の、比較をしたいときなどには、とても便利かも知れません。

□ なお、質量（慣性質量）について、ニュートンの運動方程式に固執して、(6.3) 式の「相対論的質量」を導入するコトは、(6.9a) ~ (6.9b) 式を見ても、極めて非合理であるコトが分かります。

■ 「特殊相対論的に正しい運動量」と、運動量の保存則 —

■ ココまでの議論で、「特殊相対論的に正しい力学」を考える材料は、すべて揃いました。あとは、ニュートンの運動方程式から、解析力学や統計力学などへと発展する、ニュートン力学の全ての体系が築かれていったのと同じようにして、「特殊相対論的に正しい運動方程式 = (6.1) 式」から、「特殊相対論的に正しい力学」を、築き上げるコトができるハズです。

■ まず、最初に、「特殊相対論的に正しい運動量」を、考えてみましょう。第5節の終わりに述べたように、もともと、ニュートンは、「運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ 」を定義した上で、ニュートンの運動方程式を、示したのです。そのコトを踏まえて、ニュートンの運動方程式と「特殊相対論的に正しい運動方程式」を見比べてみましょう。すると、「 k 系から見た」特殊相対論的に正しい運動量 \mathbf{p}_k 」を、次のように定義してみたくハズです。

$$\mathbf{p}_k \equiv \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (6.10)$$

当然、このとき、「 k 系から見た」特殊相対論的に正しい運動方程式」は、次のように書くコトができます。

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k \quad (6.11)$$

■ (6.11) 式は、少なくとも、見かけ上は、ニュートンの運動方程式（(5.13)式）と、まったく同じカタチをしています。したがって、「特殊相対論的に正しい運動量 \mathbf{p}_k 」を、(6.10)式のように定義すれば、運動量に関するニュートン力学の議論は、すべて、そのまま、特殊相対論にも適用できるコトになるハズです。

■ たとえば、いま、 N 個の質点からなる系を、考えてみます。 i 番目の質点 ($i = 1, 2, \dots, N$) の質量を m_i 、速度を \mathbf{u}_i 、運動量を \mathbf{p}_{ki} 、受ける力を \mathbf{F}_{ki} とすれば、この質点（「質点 i 」と呼ぶコトにします）の運動方程式は、次のように書けます。

$$m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{1 - (u_i/c)^2}} \right) = \mathbf{F}_{ki} \quad \text{または} \quad \frac{d\mathbf{p}_{ki}}{dt} = \mathbf{F}_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6.12)$$

□ ちなみに、各質点を持つ時計の指す時刻——すなわち、質点 i に固有の時刻 τ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は、一般に、質点ごとに異なります（各質点から見た他の質点の相対速度が、それぞれ異なるので）。そして、もちろん、質点 i に固有の時刻 τ_i は、 k 系にいる観測者の持つ時計の指す時刻——すなわち、 k 系の時刻 t と異なります。でも、すでに説明したように、「特殊相対論的に正しい運動方程式」のスゴさは、**考える質点が、どんな慣性系にいても（つまり、どんな運動をしていたとしても）、観測者のいる慣性系の時刻 t と位置座標 \mathbf{r}_k だけを考慮していれば、観測者から見た質点の運動の様子が、すべて、分かってしまう**コトにあるのでした。そのコトは、考える質点の数が増えても、変わりません。だから、(6.12) 式のような議論も、安心して、行なうコトができるワケです。コレって、とてもスゴいコトだと、思いませんか。

■ さらに、ココで、質点 i にはたらく力 \mathbf{F}_{ki} を、他の質点 j ($j \neq i$) から受ける力（いわゆる「内力」） $\mathbf{f}_{ki \leftarrow j}$ と、それ以外の力（いわゆる「外力」） $\mathbf{f}_{ki \leftarrow \text{out}}$ に、分解してみましよう。そうすると、質点 i の運動方程式、つまり、(6.12) 式は、次のように、書き直すコトができます。

$$\frac{d\mathbf{p}_{ki}}{dt} = \mathbf{f}_{ki \leftarrow \text{out}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ki \leftarrow j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (6.13)$$

その上で、質点 1 の運動方程式（(6.13) 式で、 $i = 1$ の場合）から、質点 N の運動方程式（(6.13) 式で、 $i = N$ の場合）まで、すべての質点の運動方程式を、足し合わせると、

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d\mathbf{p}_{ki}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{ki} \right) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_{ki \leftarrow \text{out}}) + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ki \leftarrow j} \right) \quad (6.14)$$

となります。(6.14) 式の左辺は、すべての質点の運動量を足し合わせたモノ（系の総運動量）の時間変化を表し、右辺は、系内の質点受ける力をすべて足し合わせたモノ（系内の質点受ける力の総和）を表します。

■ ところで、特殊相対論の世界でも、「作用・反作用の法則」が成り立つ——と、仮定しましょう。つまり、

$$\mathbf{f}_{ki \leftarrow j} = -\mathbf{f}_{kj \leftarrow i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N : i \neq j) \quad (6.15)$$

が、必ず成り立つ——と、仮定してみるワケです。

□ ただし、いまは、簡単のために、「作用・反作用の法則」を適用するのは、「近接力（近接作用）」だけ——と、限定しましょう。たとえば、クーロン力のような「遠隔力（遠隔作用）」を、考えてみて下さい。質点 i と質点 j が、お互いに相対運動をしているとき、相手の質点が動いた影響が、自分に届くまでに、有限の時間が必要で、すると、どの時点の $\mathbf{f}_{ki \leftarrow j}$ と、どの時点の $\mathbf{f}_{kj \leftarrow i}$ に対して、(6.15) 式の関係が成り立つのか——を考えるのは、とても難しい問題です。そこで、ココでは、簡単のため、 N 個の質点のあいだにはたらく「内力」は、すべて、近接力（近接作用）のみと仮定します。

□ ちなみに、この仮定は、「特殊相対論の枠組みでは、力は、すべて、近接力（近接作用）である」というコトを、示唆しているように感じます。振り返ってみれば、マクスウェルの方程式を考えたときも、距離の2乗に反比例するクーロン力（遠隔作用）ではなくて、電場から受ける力（近接作用）を、計算しました。近接作用と遠隔作用の問題は、とても興味深いモノだとは思いますが、いまは、先に進みましょう。

■さて、(6.15) 式の関係(作用・反作用の法則)が成り立っているなら、(6.14) 式の右辺第 2 項の和は、すべての項が打ち消し合って、結局、0 になります(これは、 $N = 2$ や $N = 3$ などの簡単な場合で、実際に、確かめてみると良いでしょう)。したがって、(6.14) 式は、次のようになります。

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{ki} \right) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_{ki \leftarrow \text{out}}) \quad (6.16)$$

(6.16) 式の左辺は、系の総運動量の時間変化を、右辺は、系内の質点にはたらく外力の総和を、それぞれ、表します。すなわち、(6.16) 式は、「系の総運動量の時間変化は、その系にはたらく外力の総和に等しい」というコトを表しています。特に、外力の総和が 0 のとき、つまり、外力がはたらいていないときには、

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{ki} \right) = \mathbf{0} \quad (6.17)$$

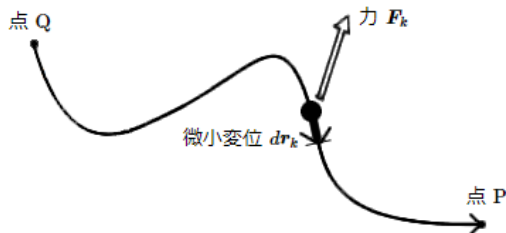
となり、 N 個の質点からなる系全体の総運動量は、時刻に依らず、常に一定であるというコトが示されます。こうして、「運動量」の定義を、(6.10) 式のように、少しだけ変更するならば、ニュートン力学とまったく同じように、「特殊相対論的に正しい運動方程式」から、「運動量の保存則」を導けるコトが、分かりました。したがって、たとえば、高校物理でおなじみの、「2 つの物体の衝突」のような、運動量に関する問題は、高校の授業で習った方法と、まったく同じように計算すれば、それだけで、自動的に、特殊相対論的に正しく解いたコトになる——というワケです(ただし、運動量については(6.10) 式の定義を使う——というコトだけが、高校物理=ニュートン力学と違うトコロです)。

□実は、運動量の定義のほかにも、高校物理=ニュートン力学とは違うトコロが、もう 1 つ、あります。それは、**特殊相対論の世界では、「質量保存の法則」が成り立たない**——というトコロです。特殊相対論の世界では、質量がエネルギーに変換したり、エネルギーが質量に変換したりします(そのコトを象徴する、 $E = mc^2$ という有名な式を見ても良いでしょう)。そのため、たとえば、高校物理でおなじみの、「2 つの物体の衝突」を考えるときには、衝突前後で、2 つの物体の質量が変化していないか、慎重に検討する必要があります。言い換えるならば、特殊相対論の世界でも、(6.16) 式や (6.17) 式は、厳密に成り立つけど、「質点」の総数 N は、変化しているかも知れませんが、「質点」の集合である「物体」の質量も、それに伴って、変化しているかも知れません。このコトは、たとえば、ロケットの運動を計算する「ツィオルコフスキーの公式」を、特殊相対論の世界で、導こうとするときには、見逃しがちな盲点となる可能性がありますので、注意が必要です。

□そんなワケで、**特殊相対論の世界で、「運動量の保存則」を考えるときには、必ず、「質量=エネルギーの保存則」も、一緒に考えるコトが、大切になります。**次に、質量=エネルギーについて考えます。

■力学的エネルギーの保存則と、「特殊相対論的に正しい運動エネルギー」

■さて、「特殊相対論的に正しい運動量」のコトが分かったので、次は、「特殊相対論的に正しいエネルギー」について、考えてみましょう。まずは、手がかりとして、ニュートン力学における、「ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」の定義を、振り返ります。そのために、「仕事」の定義の復習から始めましょう。



■もっとも基本的な「仕事 W 」の定義は、「質点にはたらく力 \mathbf{F} と、質点の移動距離 $\Delta \mathbf{r}$ の内積」、つまり、「 $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$ 」です。たとえば、上図のような経路をたどって、点 Q から点 P まで、質点移動したとき、「力 \mathbf{F}_k のした仕事 W_k 」は、次の式で、計算するコトができます。

$$W_k = \int_Q^P \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k \quad (6.18)$$

ただし、積分記号は、「点 Q における積分変数(ココでは、位置座標 \mathbf{r}_k) の値から、点 P における積分変数の値まで、定積分する」というコトを、意味するモノとします。

■仕事 W を定義したコトで、やっと、ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)を定義できます。もっとも初歩的な「力 \mathbf{F} によるポテンシャルエネルギー(位置エネルギー) U 」の定義は、「考える力 \mathbf{F} を打ち消す力を加えて(つまり、質点にナニも力がはたらいていない状態にして)、質点を静かに(ゆっくりと)移動させ、考える場所まで運ぶのに必要な仕事」です。「考える力 \mathbf{F} 」は、具体的には、電磁気力や、バネの弾性力や、重力などが、想定されています。たとえば、考える力が、バネの弾性力ならば、バネの弾性力に逆らって、バネを縮めるのに必要な仕事、「バネの弾性力によるポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」となります。

■定義が分かったトコロで、実際に、ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー) U を計算してみましょう。考える力 \mathbf{F} に逆らって、質点を移動させるためには、質点に $-\mathbf{F}$ の力を加える必要があります。したがって、たとえば、先の上図のように、 \mathbf{F}_k の力がはたらいている質点を、点 Q から点 P まで静かに移動させるのに必要な仕事、つまり、力 \mathbf{F}_k によるポテンシャルエネルギー(位置エネルギー) U_k は、

$$U_k = \int_Q^P (-\mathbf{F}_k) \cdot d\mathbf{r}_k = - \int_Q^P \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k = -W_k \quad (6.19)$$

で計算するコトができます。(6.19) 式のカチで与えられる U_k を、「(点 Q を基準にした) 点 P におけるポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」と呼びます。

□定義から明らかのように、ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)を考えるときには、基準となる点(状態)を、あらかじめ、決めておく必要があります。ただし、基準となる点(状態)が未定の場合でも、(6.19) 式の定積分を、不定積分に置き換えて、

$$- \int \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k = U_k(\mathbf{r}_k) + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}) \quad (6.20)$$

と表したとき、ココに現れる $U_k(\mathbf{r}_k)$ を、「(位置 \mathbf{r}_k における、力 \mathbf{F}_k による)ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」と呼ぶコトもあります。専門用語を使って言い直すなら、「被積分関数 $-\mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k)$ の原始関数を $U_k(\mathbf{r}_k)$ としたとき、 $U_k(\mathbf{r}_k)$ を、(位置 \mathbf{r}_k における、力 \mathbf{F}_k による)ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)と呼ぶ」と、定義するコトもあります。さらに、他にも、積分を使わないで、第 4 節「マクスウェル方程式のローレンツ変換」で紹介した、ナブラベクトル ∇_k ((4.8) 式) を使って、

$$\mathbf{F}_k = -\nabla_k U_k(\mathbf{r}_k) = - \left(\frac{\partial U_k}{\partial x}, \frac{\partial U_k}{\partial y}, \frac{\partial U_k}{\partial z} \right) \quad (6.21)$$

を満たす $U_k(\mathbf{r}_k) = U_k(x, y, z)$ のコトを、「(位置 \mathbf{r}_k における、力 \mathbf{F}_k による)ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」とする定義もあります。ちなみに、「全微分」のコトを知っていれば、(6.21) 式の両辺に $d\mathbf{r}_k$ をかけて、両辺を積分すると、(6.21) 式は、(6.20) 式に変形できるのが分かります。

□このように、「ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」の定義は、いろいろと、あります。でも、(6.21) 式から (6.20) 式が導けるように、どの定義も、まったく同じ内容を言い換えたモノであると、みなすコトができます。文脈に応じて、柔軟に(都合良く)、適当な定義を使って下さい。

■以上は、ニュートン力学における、「ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」の定義のハナシでした。この定義を、そのまま、特殊相対論の世界にも、導入してみましょう。運動量のときは、ニュートン力学の定義とは異なる定義を採用しましたが、ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)は、特殊相対論の世界でも、(6.19) ~ (6.21) 式の定義が、そのまま、導入できる——と考えてみるのです。

□ただし、特殊相対論の世界では、「どの慣性系にいる観測者が、観測するのか」というコトが、とても、重要になります。ココでは、すべて、 k 系にいる観測者から見たハナシであるコトを明らかにするために、添え字として、 k を付けてあります。 κ 系にいる観測者が見る場合を考えるときには、すべての添え字を、 κ に変える(または、 $(t, \mathbf{r}_k) = (t, x, y, z) \rightarrow (\tau, \mathbf{r}_\kappa) = (\tau, \xi, \eta, \zeta)$ のように、ローレンツ変換する)必要があります。

■さて、「ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」が定義できたので、次は、ニュートン力学のときに、「運動エネルギー」を導いたのと同じ要領で、特殊相対論の世界でも、「運動エネルギー(に相当するモノ)」を導いてみましょう。

■ニュートン力学で、運動エネルギーを導くときには、ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)の定義式に出てくる「力 \mathbf{F} 」のトコロに、「運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ 」を代入したのでした。特殊相対論でも、同じ要領で、(6.20) 式の \mathbf{F}_k に、「特殊相対論的に正しい運動方程式((6.1) 式)」の \mathbf{F}_k を、代入してみると、

$$U_k(\mathbf{r}_k) = - \int \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k = - \int \left\{ m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) \right\} \cdot d\mathbf{r}_k \quad (6.22)$$

となります(なお、(6.20) 式の積分定数 C_0 は、(6.22) 式の右辺の不定積分を計算すると出てくる新たな積分定数のなかに含めるコトができるので、省略しました。もちろん、省略しなくても、計算できます)。



■ところで、(6.22)式に出てくる微小変位 dr_k は、質点の速度 \mathbf{u} と、微小経過時間 dt を使って、 $dr_k = \mathbf{u} dt$ と表すことができます。したがって、(6.22)式の右辺の積分は、部分積分の公式も使って、

$$\begin{aligned} & - \int \left\{ m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) \right\} \cdot d\mathbf{r}_k = - \int \left\{ m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) \right\} \cdot \mathbf{u} dt \\ & = - \left[\left(m \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot \mathbf{u} \right) - \int \left(m \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) dt \right] \\ & = - \frac{mu^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} + \int \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) dt \end{aligned} \quad (6.23)$$

のように変形できます。いま、質点の速度 \mathbf{u} を、時刻 t の関数 $\mathbf{u}(t)$ とみなすと、 $d\mathbf{u} = (d\mathbf{u}/dt) dt$ となるコトが分かるので、(6.23)式の右辺第2項の積分は、

$$\int \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) dt = \int \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot d\mathbf{u} = \int \frac{m}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \quad (6.24)$$

となります。 $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}$ は、ベクトルの内積ですので、成分表示すると、 $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z$ です。また、分母に出てくる u^2 は、 $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ です。ココからは、少し技巧的になりますけど、 u_x, u_y, u_z を変数とする多変数関数 $X(u_x, u_y, u_z)$ を、次のように定義してみます。

$$X(u_x, u_y, u_z) = 1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 = 1 - \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2} \right) \quad (6.25)$$

この多変数関数 $X(u_x, u_y, u_z)$ を、時刻 t で微分すると、合成関数の偏微分の法則を用いて、

$$\frac{dX}{dt} = \frac{du_x}{dt} \frac{\partial X}{\partial u_x} + \frac{du_y}{dt} \frac{\partial X}{\partial u_y} + \frac{du_z}{dt} \frac{\partial X}{\partial u_z} = -\frac{2u_x}{c^2} \frac{du_x}{dt} - \frac{2u_y}{c^2} \frac{du_y}{dt} - \frac{2u_z}{c^2} \frac{du_z}{dt} \quad (6.26)$$

となりますけど、この(6.26)式の両辺に dt をかけると、

$$dX = -\frac{2u_x}{c^2} du_x - \frac{2u_y}{c^2} du_y - \frac{2u_z}{c^2} du_z = -\frac{2}{c^2} (u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z) = -\frac{2}{c^2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \quad (6.27)$$

が得られます。(6.25)式と(6.27)式を、(6.24)式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) dt = \int \frac{m}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \int \frac{m}{\sqrt{X}} \left(-\frac{c^2}{2} dX \right) \\ & = -\frac{mc^2}{2} [2X^{1/2}] + C = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned} \quad (6.28)$$

のように、簡単に積分するコトができます。この(6.28)式の結果を、(6.23)式に代入すると、結局、

$$\begin{aligned} & - \int \left\{ m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) \right\} \cdot d\mathbf{r}_k = -\frac{mu^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2} + C \\ & = -\frac{mu^2 + mc^2 - mu^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} + C = -\frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned} \quad (6.29)$$

となるコトが分かります。この(6.29)式を、そもそもの出発点だった(6.22)式に代入すると、最終的に、

$$\begin{aligned} U_k(\mathbf{r}_k) & = -\frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ \text{したがって } U_k(\mathbf{r}_k) + \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} & = C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned} \quad (6.30)$$

という(とても重要な)関係式が導かれます。

■さて、長い計算の末に得られた(6.30)式が、いったい、ナニを意味しているのかを、考えてみましょう。

■まず、左辺の第1項はポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)なので、第2項もエネルギーに関係する物理量であると、想像できます。次元を計算してみると、確かに、第2項は、エネルギーの次元を持っているコトが分かります。そもそも、ニュートン力学において、運動エネルギーを導いたのと、まったく同じ計算で、この項が導かれたのですから、この項を、「特殊相対論的に正しい運動エネルギー」とみなすコトができるハズです。そこで、「 $(k$ 系から見た)特殊相対論的に正しい運動エネルギー K_k 」を、次のように、定義するコトにしましょう。

$$K_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad (6.31)$$

すると、(6.30)式は、次のように、書き直すコトができます。

$$U_k(\mathbf{r}_k) + K_k = C: \text{定数 (位置 } \mathbf{r}_k \text{ や時刻 } t \text{, 質点の速度 } \mathbf{u} \text{ に依らない定数)} \quad (6.32)$$

すなわち、運動エネルギー K_k の定義を、(6.31)式のように変更しさえすれば、「ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー) $U_k(\mathbf{r}_k)$ と、運動エネルギー K_k の和が、つねに一定になる」という、「力学的エネルギーの保存則」が、特殊相対論の世界でも、成り立つコトが分かります。

□ところで、(6.32)式の C が、「位置 \mathbf{r}_k や時刻 t 、質点の速度 \mathbf{u} に依らない定数」となっているコトについて——この C は、積分定数でしかたけれども、 $\mathbf{r}_k, t, \mathbf{u}$ を積分変数とする積分から出てきた積分定数なので、「この C は、 $\mathbf{r}_k, t, \mathbf{u}$ に依らない定数でなければいけない」というコトが分かります。

□ちなみに、 $u/c \ll 1$ (つまり、質点の速さ u が、光速 c に比べて十分に小さい)として、(6.31)式の「特殊相対論的に正しい運動エネルギー K_k 」を、テイラー展開してみると、

$$K_k \simeq mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 \quad (u/c \ll 1) \quad (6.33)$$

となるので、(6.32)式から、ただちに、

$$U_k(\mathbf{r}_k) + \frac{1}{2} mu^2 = C - mc^2: \text{定数 (} \mathbf{r}_k, t, \mathbf{u} \text{ に依らない定数)} \quad (u/c \ll 1) \quad (6.34)$$

のように、ニュートン力学におけるエネルギーの保存則が導かれます。つまり、質点の速さ u が、光速 c に比べて十分に小さいときには、特殊相対論的に正しいエネルギーの保存則から、ニュートン力学におけるエネルギーの保存則が導かれるのです。また、(6.33)式より、質点の速さ u が、光速 c に比べて十分に小さいときには、「特殊相対論的に正しい運動エネルギー K_k 」が、(質点の速さ u とは無関係な「定数」とみなせる項 mc^2 の分を除いて)ニュートン力学における運動エネルギー $(1/2)mu^2$ と、同じになるコトも分かります。ニュートン力学における運動エネルギーには現れない mc^2 の項は、SF好きな人にとって、特殊相対論でもっとも有名な方程式「 $E = mc^2$ 」を思い起こさせますけど、いわゆる「静止エネルギー」の存在証明は、また、別のハナシです。いまは、先に進むコトにしましょう。

■このようにして、特殊相対論の世界でも、「力学的エネルギーの保存則」を導くコトができました。そこで、ニュートン力学と同じく、ココでも、「 $(k$ 系から見た)力学的エネルギー」を E_k で表すコトにしましょう。すると、特殊相対論の世界における「力学的エネルギーの保存則」は、次のように、書くコトができます。

$$E_k = U_k(\mathbf{r}_k) + K_k = U_k(\mathbf{r}_k) + \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \implies \frac{dE_k}{dt} = 0 \quad (6.35)$$

□ところで、実は、ココまでの説明のなかで、簡単のために、省略していたハナシがありました。それは、「ポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」の定義についてのハナシです。最初に、(6.19)式で、「(点 Q を基準にした)点 P におけるポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」を、定義しました。ところが、一般に、(6.19)式の定積分の値は、点 Q から点 P まで、「どのような経路に沿って」、質点を運ぶのかによって、変わってしまいます。たとえば、「考える力 \mathbf{F}_k 」が摩擦力だった場合には、点 P に到着するまでに、遠回りをすればするほど、 $\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k$ の値が積算されていくので、(6.19)式の定積分の絶対値は、いくらでも、大きくなってしまいます。したがって、「(点 Q を基準にした)点 P におけるポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」を、1つの値に決めるコトができません。一方で、「考える力 \mathbf{F}_k 」がバネの弾性力の場合は、到達点(点 P)が同じなら、「5 cm 縮める」場合も、「3 cm 縮めて、2 cm 戻してから、4 cm 縮める」場合も、経路に依らずに、(6.19)式の定積分の値は、同じになります(縮めるときと、戻すときで、 $\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k$ の符号の違いによって、積分が、うまく打ち消されるためです)。当然、「力 \mathbf{F}_k によるポテンシャルエネルギー(位置エネルギー)」は、(6.19)式の定積分が、経路に依らずに、1つの値に決まるような力 \mathbf{F}_k でないと、定義できません。そのような力 \mathbf{F}_k を、「保存力」と呼びます。たとえば、バネの弾性力は保存力ですけど、摩擦力は保存力ではありません。保存力ではない力(非保存力)がはたらく場合は、もちろん、(6.35)式は成り立ちません。とは言え、特殊相対論の世界では、非保存力を考えなければいけないコトは、ほとんど、ないハズと思われる(摩擦力でさえ、多数の分子の衝突と捉えて、系全体で見ると、エネルギーの保存則が成り立つていると、みなせるハズです)。そんなワケで、安心して、(6.35)式を使って、いろんな問題を解いてみて下さいな。

□せっかくですので、上の説明を、ちゃんとした数式にして、表してみましょ。 (k 系から見た) 質点にはたらく力を、保存力 F_k と非保存力 f_k に分けると、特殊相対論的に正しい運動方程式 = (6.1) 式は、

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right) = \mathbf{F}_k + \mathbf{f}_k \quad (6.36)$$

と書くことができます。ココで、運動エネルギーを導出したときと同様に、両辺に $d\mathbf{r}_k = \mathbf{u} dt$ をかけて、積分してみます。すると、左辺は (6.29) 式で計算済みで、右辺第 1 項は (6.20) 式から「力 \mathbf{F}_k によるポテンシャルエネルギー (位置エネルギー) $U_k(\mathbf{r}_k)$ 」になるコトが分かっています。よって、積分結果は、

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = -U_k(\mathbf{r}_k) + \int (\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}) dt \quad \text{または} \quad K_k = -U_k(\mathbf{r}_k) + \int (\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}) dt$$

したがって $U_k(\mathbf{r}_k) + K_k = E_k = \int (\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}) dt$ (6.37)

となります。さらに、(6.37) 式の両辺を、時間 t で微分するコトで、

$$\frac{dE_k}{dt} = \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u} \quad (6.38)$$

が導かれます。つまり、非保存力 \mathbf{f}_k ((6.19) 式の積分値が、1 つに定まらなくなる力) がはたらくと、力学的エネルギー E_k は、時間の経過とともに変化してしまうコトが分かります。たとえば、質点に、質点の速度 \mathbf{u} に比例するような摩擦力 $\mathbf{f}_k = -b\mathbf{u}$ ($b > 0$ は比例定数) がはたらくと、(6.38) 式は、

$$\frac{dE_k}{dt} = -bu^2 \quad (6.39)$$

となるので、力学的エネルギー E_k は、時間の経過とともに減少していくコトが分かります。逆に言えば、非保存力 \mathbf{f}_k がはたらかなければ (特殊相対論の世界で考える、具体的な問題の、ほとんどの場合には)、力学的エネルギー E_k は、常に一定で、変化しない——というコトになります。

■こうして、特殊相対論の世界でも、運動量と運動エネルギーの定義を変更するコトで、「運動量の保存則」と「力学的エネルギーの保存則」が成り立つ——というコトが、分かったのです。つまり、**ニュートン力学で、「運動量の保存則」と「力学的エネルギーの保存則」を使って解ける問題は、特殊相対論の世界でも、まったく同じようにして、解けるハズ**——というコトになるワケです。もちろん、運動量と運動エネルギーの定義が変更されているので、同じ問題でも、計算結果は変わってきます。ナニが、どのように、どれだけ、変わるのか——というコトは、とても興味深く、その結果は、センス・オブ・ワンダーに満ちたモノです。ぜひ、具体的な問題を、いろいろと解いてみて、ニュートン力学の世界と、特殊相対論の世界との違いを、体感してみ下さいね。



■ 7. 特殊相対論的な運動量とエネルギーの関係 —— 新たな世界観への扉を開く

■さて、ココまでに、「特殊相対論的に正しい運動量」と、「特殊相対論的に正しいエネルギー」を、導くコトができました。ところで、「ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー)」は、質点ではなく、空間 (「場」) が持つエネルギーとみなすコトもできます。そこで、ココからは、質点そのものが持つ「運動エネルギー K_k 」だけに注目してみましょ。第 6 節の結果をまとめると、 k 系から見た、質点の運動量 \mathbf{p}_k とエネルギー K_k 、および、 κ 系から見た、同じ質点の運動量 \mathbf{p}_κ とエネルギー K_κ は、それぞれ、次のように表されるのでした。

$$[k \text{ 系}] \quad \text{運動量} : \mathbf{p}_k \equiv \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \quad \text{エネルギー} : K_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad (7.1a)$$

$$[\kappa \text{ 系}] \quad \text{運動量} : \mathbf{p}_\kappa \equiv \frac{m\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}}, \quad \text{エネルギー} : K_\kappa = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \quad (7.1b)$$

ココで、 \mathbf{u} は k 系から見た質点の速度、 $\boldsymbol{\omega}$ は κ 系から見た質点の速度、 m は質点の質量、 c は光速です。

■ 特殊相対論的な運動量とエネルギーの関係から導かれる不変量 ——

■ (7.1a) ~ (7.1b) 式を見ると、運動量を表す式と、エネルギーを表す式が、とても良く似ているコトに、気がつきます。さらに眺めると、運動量の式の分子にある \mathbf{u} や $\boldsymbol{\omega}$ と、エネルギーの式の分子にある c を、うまく組み合わせれば、お互いの式に共通する分子を、打ち消すコトができるかも——と思えてきます。実際、試しに、 $(K_k/c)^2 - \mathbf{p}_k^2$ を計算してみると、

$$\left(\frac{K_k}{c} \right)^2 - \mathbf{p}_k^2 = \frac{m^2 c^2}{1-(u/c)^2} - \frac{m^2 u^2}{1-(u/c)^2} = \frac{m^2 c^2}{1-(u/c)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right\} = m^2 c^2 \quad (7.2)$$

となって、狙い通りに、定数だけが残りました。したがって、もちろん、 κ 系から見た場合を計算してみても、

$$\left(\frac{K_\kappa}{c} \right)^2 - \mathbf{p}_\kappa^2 = \frac{m^2 c^2}{1-(\omega/c)^2} - \frac{m^2 \omega^2}{1-(\omega/c)^2} = \frac{m^2 c^2}{1-(\omega/c)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right\} = m^2 c^2 \quad (7.3)$$

のように、まったく同じ結果が得られます。質点の質量 m も、光速 c も、どんな慣性系で観測したとしても、必ず同じ値になるのですから、当たり前の結果と思えます。けれども、実は、これは、とても重要な結果です。なぜなら、観測者や、どんな慣性系にいても、エネルギーと運動量について、(7.2) 式や (7.3) 式のような計算をすると、必ず、同じ値になる——すなわち、どんな 2 つの慣性系のあいだでも、必ず、

$$\left(\frac{K_k}{c} \right)^2 - \mathbf{p}_k^2 = \left(\frac{K_\kappa}{c} \right)^2 - \mathbf{p}_\kappa^2 \quad (7.4)$$

という関係が成り立つというコトは、観測者や質点の運動状態にかかわらず、ローレンツ変換に煩わされずに、計算できる運動力学を、作り上げられるかも知れない——というコトを、示唆するからです。

□具体的には、ニュートン力学における、「解析力学」に相当するようなモノが、特殊相対論の世界でも、考えられるのではないか——という発想が、念頭にあります。ニュートン力学においては、デカルト座標系ではない座標系 (たとえば、極座標や拘束条件のある系) で、質点の運動を考えるには、面倒な座標変換が必要で、そこで、ニュートン力学では、座標の取り方に煩わされないように、どんな座標系でも成り立つ「解析力学」の理論が生まれ、発展してきました。同様に、**特殊相対論の世界でも、(7.2) ~ (7.4) 式を手がかりにして、ローレンツ変換などに煩わされない、「特殊相対論的に正しい解析力学」と呼ぶべき、新しい理論体系が作れるかも知れない——という発想が、自然に生まれてくるワケです。**

□結論だけを言うと、この発想は、特殊相対論の世界だけを考える限り、実は、あまり、有用なモノとは、言えないかも知れません。なぜなら、慣性系にいる観測者ならば、ローレンツ変換のコトは知らなくても、ナニも考えずに、「特殊相対論的に正しい運動方程式 = (6.1) 式」を計算するだけで、物体の運動のコトは、すべて、分かってしまうからです。だから、たとえ、「特殊相対論的に正しい解析力学」を作っても、ありがたみは、あまり、なさそうです。

□けれども、一般相対論の世界を考えるときには、「特殊相対論的に正しい解析力学」が、とても頼もしい手がかりとなる可能性を秘めています。なぜなら、「特殊相対論的に正しい運動方程式 = (6.1) 式」は、デカルト座標で書かれていますけど、一般相対論の世界では、空間が歪んでいる (空間全体をデカルト座標で表せない) からです。たとえば、質点が、まっすぐ、 x 方向へ微小距離 dx だけ進んだとき、そこでは、もはや、質点は (それまでの) x 方向を向いていない——というコトになるのです。**ココで、解析力学は、座標の取り方に煩わされない、どんな座標系でも成り立つ理論であるコトを、思い出して下さい。もしも、(7.2) ~ (7.4) 式を手がかりに、「特殊相対論的に正しい解析力学」を作れるコトができれば、たとえ、空間が歪んでいても、その歪みに沿った (曲がった) 座標軸を持つような、特殊な座標系を考えるコトで、質点の運動の計算は、とてもラクになるに違いありません。**

□もちろん、(7.2) ~ (7.4) 式の関係だけで、「特殊相対論的に正しい解析力学」を作り上げるのは、難しいだろうと思われま。ところが、特殊相対論的に正しいエネルギー K_k と運動量 \mathbf{p}_k を、それぞれ、ローレンツ変換してみると、「特殊相対論的に正しい解析力学」の可能性が、一気に現実味を帯びてくる、驚くべき事実が見えてきます。それについては、次項で、詳しく検討するので、楽しみにして下さいね。

■ところで、先に進む前に、(7.2) ~ (7.3) 式について、ちょっとした余談など……。いま、質量がゼロの粒子 (たとえば光子とか) を、考えてみましょう。(7.2) 式に、 $m = 0$ を代入すると、

$$\left(\frac{K_k}{c} \right)^2 - \mathbf{p}_k^2 = 0 \quad \text{したがって} \quad \frac{K_k}{c} = |\mathbf{p}_k| \quad \text{または} \quad K_k = c|\mathbf{p}_k| \quad (7.5)$$

となるのが分かります。もちろん、本来、この議論に、ほとんど意味はありません。なぜなら、エネルギー K_k と運動量 \mathbf{p}_k の大きさは、ともに、質量 m の値に依存していて、質量 m がゼロ ($m = 0$) の場合は、どちらもゼロ ($K_k, |\mathbf{p}_k| = 0$) になってしまうからです。ところが、実は、いまの議論とは別に、マクスウェルの方程式から、光子のエネルギーと運動量が、厳密に計算できて、光子のエネルギー E_k と運動量 \mathbf{p}_k のあいだには、

$$\frac{E_k}{c} = |\mathbf{p}_k| \quad \text{または} \quad E_k = c|\mathbf{p}_k| \quad (7.6)$$

という関係が成り立つ——という結果が得られます。なんと、(7.5) 式は、実際の、光子のエネルギー E_k と運動量 \mathbf{p}_k のあいだの関係を、正しく表していたのです。これは、とても不思議なコトだと、思いませんか。

■特殊相対論的な運動量とエネルギーのローレンツ変換 —

■さて、 k 系から見た質点のエネルギー K_k と運動量 p_k が分かったので、同じ質点を、 κ 系から見たときに、エネルギー K_κ と運動量 p_κ はどうなるのか——その関係を考えてみましょう。そのために、(7.1a) 式の K_k と p_k を、それぞれ、(コレまで何回もやってきたのと同じ要領で) ローレンツ変換してみます。この計算は、ちょっとメンドクさいと感じるかも知れませんが、(2.6) ~ (2.7) 式から導かれる、次の関係式を知っていると、とてもラクに計算できます。

$$\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{c^2}\right) \quad (7.7a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right) \quad (7.7b)$$

■この関係式と(2.6)式を使って、まずは、(7.1a) 式の K_k を、ローレンツ変換すると、ただちに、

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{c^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left\{ \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} + \mathbf{v} \cdot \left(\frac{m\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (K_\kappa + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_\kappa) \end{aligned} \quad (7.8)$$

が得られます。あとの楽しみのために、(7.8) 式の両辺を c^2 で割った次の式も、書いておきましょう。

$$\frac{K_k}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{K_\kappa}{c^2} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_\kappa}{c^2} \right) \quad (7.9)$$

続いて、同様に、(7.1a) 式の p_k を、ローレンツ変換すると、係数がうまく打ち消し合って、ただちに、

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \mathbf{u} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \left[\boldsymbol{\omega} + \left\{ -\frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{v^2} + 1 \right) \right\} \mathbf{v} \right] \\ &= \frac{m\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} + \left[-\frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \left(\frac{m\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left\{ \frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \left(\frac{m\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \right) + \frac{m}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \right\} \right] \mathbf{v} \\ &= \mathbf{p}_\kappa + \left\{ -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_\kappa}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_\kappa}{v^2} + \frac{K_\kappa}{c^2} \right) \right\} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (7.10)$$

という関係式が得られます。すなわち、 κ 系から見て、エネルギー K_κ と運動量 p_κ を持つ質点は、 k 系では、(7.8) ~ (7.10) 式で与えられるエネルギー K_k と運動量 p_k を持つ質点として、観測される——というワケです。実は、質点だけでなく、電磁波(光)の持つエネルギーと運動量についても、(7.8) ~ (7.10) 式と、まったく同じ関係が成り立つ——というコトが、マクスウェルの方程式から証明できます。

■(7.9) ~ (7.10) 式を眺めていると、恐るべき事実に気づくに違いありません。気づきやすくするために、改めて、 k 系の時刻・位置 (t, \mathbf{r}_k) と κ 系の時刻・位置 $(\tau, \mathbf{r}_\kappa)$ のあいだの一般ローレンツ変換式(1.2a) ~ (1.2b) 式) を、ココにも、示しておきましょう。

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\tau + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_\kappa}{c^2} \right) \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_\kappa + \left\{ -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_\kappa}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_\kappa}{v^2} + \tau \right) \right\} \mathbf{v} \quad (1.2b)$$

■驚くべきコトに、(7.9) ~ (7.10) 式と、(1.2a) ~ (1.2b) 式は、まったく同じカタチをしています。すなわち、「時刻 t 」と「位置 \mathbf{r}_k 」に関する一般ローレンツ変換式と、「エネルギー K_k 」と「運動量 p_k 」に対する一般ローレンツ変換の結果が、お互いに、まったく同じカタチをしているのです。一般ローレンツ変換式からは、「時間」と「空間」が、それぞれ、別々に存在している、独立な物理量ではなくて、お互いに、密接に絡み合い、影響し合っている、「時空間」と呼ぶべき単一の物理量(の別々の側面)である——というコトが、明らかになりました。したがって、(7.9) ~ (7.10) 式が、(1.2a) 式 ~ (1.2b) 式と、まったく同じカタチをしているコトから、「エネルギー」と「運動量」も、「時空間」と同じく、「エネルギー-運動量」と呼ぶべき単一の物理量(の別々の側面)として扱うべきである——と考えられるのではないだろうか、と思えてきます。

■ところで、(7.9) ~ (7.10) 式と(1.2a) ~ (1.2b) 式を見比べると、

$$\frac{K_k}{c^2} \iff t, \quad \mathbf{p}_k \iff \mathbf{r}_k \quad \text{および} \quad \frac{K_\kappa}{c^2} \iff \tau, \quad \mathbf{p}_\kappa \iff \mathbf{r}_\kappa \quad (7.11)$$

という対応関係があるコトが示唆されます。ココで、(7.4) 式を思い出してみましょう。エネルギーと運動量のあいだには、 $(K_k/c^2)^2 - p_k^2 = (K_\kappa/c^2)^2 - p_\kappa^2$ という関係がありました。この関係式に、(7.11) 式の対応関係を当てはめると、ただちに、

$$(ct)^2 - r_k^2 = (c\tau)^2 - r_\kappa^2 \quad (7.12)$$

という関係式が得られます。そして、(7.12) 式の左辺に、一般ローレンツ変換式(1.2a) ~ (1.2b) 式を代入すると、ちゃんと、(7.12) 式の右辺になる——すなわち、(7.12) 式の関係がホントに成り立つというコトが、実際に確かめられるのです(ちょっとメンドクさいですけど、計算自体は簡単です)。つまり、**どんな2つの慣性系のあいだでも、時刻と位置について、 $(ct)^2 - r_k^2$ を計算すると、必ず同じ値になる**——というコトです。コレは、とても重要な結果です。エネルギーと運動量の関係の他にも、ローレンツ変換に煩わされない、「特殊相対論的に正しい解析力学」への手がかりが、新たに、もう1つ、得られたコトになるからです。

□なお、数学的なエレガントさを求めるならば、(7.11) 式で表した対応関係は、(7.9) ~ (7.10) 式と(1.2a) ~ (1.2b) 式を見比べると、(7.4) 式と(7.12) 式を見比べて、

$$\frac{K_k}{c} \iff ct, \quad \mathbf{p}_k \iff \mathbf{r}_k \quad \text{および} \quad \frac{K_\kappa}{c} \iff c\tau, \quad \mathbf{p}_\kappa \iff \mathbf{r}_\kappa \quad (7.13)$$

と表したほうが望ましいかも知れませんが、実は、このとき、対応関係の左側の K_k/c と p_k (K_κ/c と p_κ) は、どちらも、運動量の単位を持ち、対応関係の右側の ct と r_k ($c\tau$ と r_κ) は、どちらも、長さの単位を持つコトになります。物理的意味はともかく、数学的には、キレイな対応関係と言えます。

□この考えを推し進めると、次のような主張に発展するでしょう。すなわち、「 k 系の時刻と位置 (t, \mathbf{r}_k) の代わりに、 k 系の時空間 (ct, \mathbf{r}_k) を考えるコトにすれば、より合理的で、数学的にエレガントな理論が、作れるのでは?」、「エネルギー K_k と運動量 p_k も、常に、 K_k/c と p_k のペアを、1つの不可分なモノとして扱うようにすれば、新たな理論を作れるのでは?」——といった主張です。これらの発想のコトは、ほとんどの教科書や解説などで、詳しく説明されています。興味を持ったら、ぜひ、調べてみて下さいね。

□ところで、「特殊相対論的に正しい解析力学」を考えるならば、(7.12) 式のような、時刻 t と位置 r_k の関係よりも、むしろ、微小時間 dt と微小変位 dr_k の関係を考えるほうが、ナニかと便利です。そこで、 k 系の時刻と位置 (t_1, \mathbf{r}_{k1}) および (t_2, \mathbf{r}_{k2}) と、対応する κ 系の時刻と位置 $(\tau_1, \mathbf{r}_{\kappa1})$ および $(\tau_2, \mathbf{r}_{\kappa2})$ を、考えます。そして、時間間隔 Δt , $\Delta \tau$ と変位 Δr_k , Δr_κ を、次のように定めるコトにしましょう。

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta r_k = \mathbf{r}_{k2} - \mathbf{r}_{k1}, \quad \Delta \tau = \tau_2 - \tau_1, \quad \Delta r_\kappa = \mathbf{r}_{\kappa2} - \mathbf{r}_{\kappa1} \quad (7.14)$$

この場合に、 $(c\Delta t)^2 - (\Delta r_k)^2$ を計算してみると、当然、

$$\begin{aligned} (c\Delta t)^2 - (\Delta r_k)^2 &= (c(t_2 - t_1))^2 - (\mathbf{r}_{k2} - \mathbf{r}_{k1})^2 \\ &= (ct_2)^2 + (ct_1)^2 - (\mathbf{r}_{k2})^2 - (\mathbf{r}_{k1})^2 - 2(c^2 t_1 t_2 - \mathbf{r}_{k1} \cdot \mathbf{r}_{k2}) \end{aligned} \quad (7.15)$$

となりますけれど、コレに、一般ローレンツ変換式(1.2a) ~ (1.2b) 式を代入すると、いろいろと打ち消し合って、最終的に、

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta r_k)^2 = (c\Delta \tau)^2 - (\Delta r_\kappa)^2 \quad (7.16)$$

となるコトが確かめられます(ちょっとメンドクさいですけど、計算自体は簡単です)。(7.16) 式が、どんな時間間隔 Δt , $\Delta \tau$ と変位 Δr_k , Δr_κ でも、成り立つコトに、注意して下さい。どんな時間間隔と変位に対しても成り立つのですから、もちろん、微小時間 dt , $d\tau$ と微小変位 dr_k , dr_κ に対しても、(7.16) 式は成り立つはずです。つまり、次の関係式が、成り立つ——というコトになります。

$$(cdt)^2 - (dr_k)^2 = (cd\tau)^2 - (dr_\kappa)^2 \quad (7.17)$$

(7.17) 式こそ、特殊相対論から一般相対論に進む上で、もっとも重要な関係式の1つです。ほとんどの教科書や解説などで、さまざまな仕方、詳しく説明されていますので、ぜひ、覚えておいて下さいね。

■いろいろなローレンツ不変量 —

■ココまでに分かったコトを、まとめてみましょう。まず、同じ質点を観測する場合には、どんな慣性系にいる観測者が観測しても、(質点のエネルギー/光速)² - (質点の運動量)² を計算した結果は、必ず同じ値になるコトが分かりました。次に、ある出来事を観測する場合には、どんな慣性系にいる観測者が観測しても、その出来事が起きた時刻に対して、(光速×時刻)² - (位置)² を計算した結果は、必ず同じ値になる——というコトも分かりました。言い換えるなら、(質点のエネルギー/光速)² - (質点の運動量)² や、(光速×時刻)² - (位置)² をローレンツ変換しても、その式のカタチや値は変わらない——というコトです。その意味で、このような式、および、このような式が表す物理量を、「ローレンツ不変量」と呼びます。

□ところで、(質点のエネルギー/光速)² - (質点の運動量)² を計算した結果は、(7.2) ~ (7.3) 式から、 $m^2 c^2$ となるコトが分かっています。同じように、(光速×時刻)² - (位置)² の値も、既知の物理量の簡単な組み合わせで表せると便利です。でも、それは難しそうなので、ココでは、便宜上、記号 s を用いて、

$$s^2 \equiv (ct)^2 - r_k^2 = (cr)^2 - r_\kappa^2 \quad (7.18)$$

と書くコトにします。さらに、ココでは、便宜上、記号 ds を用いて、

$$(ds)^2 \equiv (cdt)^2 - (dr_k)^2 = (cd\tau)^2 - (dr_\kappa)^2 \quad (7.19)$$

と書くコトにします(ちなみに、この ds のコトを、「世界間隔」や「世界距離」と呼ぶコトがあります。なぜ、そう呼ぶのかは、長い脱線になるので、今回は割愛。気になる人は、ほとんどの教科書や解説などで説明されているので、調べてみてくださいね)。言うまでもなく、 s や ds は、ローレンツ不変量です。

■さて、 $(K_k/c)^2 - p_k^2$ や、 s および ds が、ローレンツ不変量であるコトは、分かりました。ならば、他にも、ローレンツ不変量は、あるのでしょうか。まずは、(7.2) ~ (7.4) 式の両辺を m^2 で割るコトで、次の式が得られます。

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\right)^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}}\right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}}\right)^2 \quad (7.20)$$

この式の左辺は k 系で測った速度 \mathbf{u} だけの関数で、右辺は κ 系で測った速度 $\boldsymbol{\omega}$ だけの関数になっています。そして、左辺に、(2.6) 式 (k 系で測った速度 \mathbf{u} と、 κ 系で測った速度 $\boldsymbol{\omega}$ のあいだの関係) を代入すると、ちゃんど、右辺になるコトが確かめられます。すなわち、(7.20) 式は、ローレンツ不変量を表しています。速度だけの関係なので、エネルギーと運動量の関係を表すローレンツ不変量 ((7.2) ~ (7.4) 式) よりも、本質的な関係であると言えるのかも——と思わされますね。

■ココまでのパターンだと、新たなローレンツ不変量を探すには、とりあえず、既知の物理量を 2 乗してみる——という方法が、良いのかも知れません。実際、電場 \mathbf{E}_k と磁場 \mathbf{B}_k については、(4.29a) ~ (4.29b) 式を、それぞれ、2 乗して、結果を見比べてみると、すぐに、

$$\left(\frac{\mathbf{E}_k}{c}\right)^2 - \mathbf{B}_k^2 = \left(\frac{\mathbf{E}_\kappa}{c}\right)^2 - \mathbf{B}_\kappa^2 \quad (7.21)$$

という関係が成り立つコトに気づくはずですが(ココで、ベクトル解析の公式 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 、 $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 、および、 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$ を使うコトで、この関係に至る見通しが、断然、良くなるでしょう)。けれども、残念ながら、加速度 \mathbf{a} や力 \mathbf{F}_k については、(3.4) 式や (6.5b) 式を 2 乗してみても、簡単な関係は、見出しそうにありません。もっと本質的なナニかが、他にありそうですけど、今の段階で、それに気づくのは、ちょっと、難しそうです。コレについては、ココで考えるには、少し技巧的に過ぎるハナシになるので、『おまけ：固有時間で測った速度と加速度』で、扱うコトにしましょう。

■このようにして、いろいろなローレンツ不変量を求めるコトができました。とても不思議で、興味深いハナシだと思いますけど、コレらの結果に、どのような物理的・数学的な意味があるのでしょうか。実は、特殊相対論の世界で完結するハナシならば、「オモシロい関係」というだけで、具体的・実用的な使い道は、なさそうです。一般相対論に興味があれば、第 6 節までの結果を使って、「ウラシマ効果」や「対消滅エンジンロケット」などの、具体的な SF ネットの計算をしてみるほうが、楽しいかも知れません。でも、この節で得られた結果は、一般相対論の世界に進むときには、必要不可欠な準備(の一部)となるでしょう。ただ、ココから、さらに先に進むのは、さすがに、高校の物理・数学の知識・概念だけでは、もはや、「お手上げ」と言わざるをえません。とは言え、ココまでの結果でも、高校の物理・数学の知識・概念だけを使った、一般相対論への準備としては、差し当たって、十分なモノだと言えるはず。ココまでのハナシを読んで、自信がついたなら、ぜひ、一般相対論にも、挑戦してみてくださいね。



■おまけ：固有時間で測った速度と加速度

■ところで、「特殊相対論的に正しい解析力学」のハナシが、ウヤマヤになっている気がしますけれど、どうなったのでしょうか。実は、「特殊相対論的に正しい解析力学」のハナシは、ココで説明するには、長くなりすぎます。そもそも、高校の物理・数学の知識・概念だけを使って説明するというのは、不可能ではないかも知れませんが、かなり厳しそうです。そんなついで、ココでは、「特殊相対論的に正しい解析力学」のハナシは、残念ながら、諦めます。興味を持ったら、ぜひ、自分で勉強してみてくださいね。

■一方で、加速度 \mathbf{a} や力 \mathbf{F}_k に関するローレンツ不変量のハナシは、少し技巧的にはなりますけど、高校の物理・数学の知識・概念だけで、十分に、理解できると思います。また、特殊相対論の世界に少し興味がなくても、このハナシに触れるコトで、興味深い世界観が、垣間見られる話題であると感じます。そこで、「おまけ」として、簡単に、触れておきましょう。

■まず、「特殊相対論的に正しい運動方程式」を導いたときに、考える質点に対して静止している慣性系を使って、上手くいった——というコトを、思い出して下さい。そこで、ココでは、考える質点に対して静止している慣性系を Σ 系と呼び、 Σ 系の時刻と位置を $(\sigma, \mathbf{r}_\Sigma)$ で表すコトにしましょう。 Σ 系にいる観測者から見て、質点は静止している——というコトを、数式で表すと、次のようになります。

$$\frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{d\sigma} = \mathbf{0} \quad (A.1)$$

□なお、 Σ 系は、質点に対して常に静止している慣性系です。したがって、 Σ 系の時刻 σ は、「質点を持つ時計の指す時刻 σ 」と、言い換えるコトもできます。

■ところで、 k 系から見たときの質点の速度は、 $\mathbf{u} = d\mathbf{r}_k/dt$ で表されるのでした。 Σ 系は、質点に対して静止している慣性系ですので、 k 系から見た Σ 系の相対速度も、 \mathbf{u} というコトになります。したがって、 k 系と Σ 系のあいだのローレンツ変換式は、(1.2a) ~ (1.2b) 式を参照すると、

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \left(\sigma + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_\Sigma}{c^2} \right) \quad (A.2a)$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_\Sigma + \left\{ -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_\Sigma}{u^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_\Sigma}{u^2} + \sigma \right) \right\} \mathbf{u} \quad (A.2b)$$

と書かれるコトが分かります。また、(2.9) ~ (2.10) 式を参照すると、(A.1) 式にも注意して、

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad \text{および} \quad \frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} \quad (A.3)$$

となるコトが分かります。ココで、意味や必然性は(いまは)良く分かりませんが、とにかく、 k 系の位置 \mathbf{r}_k を、 Σ 系の時刻 σ で、微分してみると、どうなるでしょうか。(A.3) 式から、ただちに、

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{d\sigma} = \frac{dt}{d\sigma} \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \mathbf{u} \quad (A.4)$$

という関係が得られます。

■ κ 系と Σ 系の関係についても、同様の議論が成り立ちます。 κ 系から見た質点の速度は、 $\boldsymbol{\omega} = d\mathbf{r}_\kappa/d\tau$ でしたので、 κ 系から見た Σ 系の相対速度も、 $\boldsymbol{\omega}$ というコトになります。このコトに注意すると、 κ 系と Σ 系のあいだには、次のような関係が成り立っているのが、分かります。

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \left(\sigma + \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\Sigma}{c^2} \right) \quad (A.5a)$$

$$\mathbf{r}_\kappa = \mathbf{r}_\Sigma + \left\{ -\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\Sigma}{\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\Sigma}{\omega^2} + \sigma \right) \right\} \boldsymbol{\omega} \quad (A.5b)$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \quad \text{および} \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (A.5c)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_\kappa}{d\sigma} = \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d\mathbf{r}_\kappa}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(\omega/c)^2}} \boldsymbol{\omega} \quad (A.5d)$$

□ (1.1a) ~ (1.1b) 式は、あくまで、 κ 系と k 系のあいだの関係式だったコトに注意。ココでは、 k 系、 κ 系、 Σ 系(考える質点)、それぞれのあいだの関係を、改めて、確認しておいて下さいね。

■さて、たったいま求めた関係 (特に、(A.3) ~ (A.4) 式、および、(A.5c) ~ (A.5d) 式) を念頭に、再び、速度に関するローレンツ不変量を表す (7.20) 式を見返してみると、(7.20) 式は、

$$\left(c \frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dr_k}{d\sigma}\right)^2 = \left(c \frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dr_k}{d\sigma}\right)^2 \quad (\text{A.6})$$

と書き直せるコトに気がきます。この関係式からは、「もしかしら、質点の運動を調べるときには、観測者のいる慣性系の時刻 (観測者の持つ時計の指す時刻) は、実は、重要ではなくて、質点自身が持つ時計の指す時刻 σ こそが、本質的なのかも？」と、思わされてしまいそうです。もし本当に、この直感が正しいなら、質点自身が持つ時計の指す時刻 σ を調べるコトが、ナニよりも重要になってくるでしょう。そして、**質点自身が持つ時計の指す時刻 (質点に対して静止している慣性系 = Σ 系の時刻) σ のコトを、「(この質点の) 固有時間 σ 」、または、「(この質点の) 固有時 σ 」と、名づけておきましょう。**

■速度 (= 位置の時間微分) に関するローレンツ不変量を求めるときには、観測者のいる慣性系の時間 t や τ ではなく、考える質点の固有時間 σ を使って、時間微分をすると、キレイな関係式が得られました。それなら、同じ要領で、2 階の時間微分を考えれば、加速度に関するローレンツ不変量が、得られるかも知れませんが。早速、計算してみましょう。2 階の時間微分が、それぞれ、

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2} = \frac{1}{(1 - (u/c)^2)^2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2}, \quad \frac{d^2 r_k}{d\sigma^2} = \frac{1}{1 - (u/c)^2} \mathbf{a} + \frac{1}{(1 - (u/c)^2)^2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{u} \quad (\text{A.7a})$$

$$\frac{d^2 \tau}{d\sigma^2} = \frac{1}{(1 - (\omega/c)^2)^2} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{c^2}, \quad \frac{d^2 r_k}{d\sigma^2} = \frac{1}{1 - (\omega/c)^2} \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{(1 - (\omega/c)^2)^2} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{c^2} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.7b})$$

となるコトは、すぐに分かります。次に、(A.7a) 式の \mathbf{u} と \mathbf{a} を、(2.6) 式と (3.4) 式、(7.7a) 式を使って、 $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ に変換してみます。あとは、ひたすら、根性で計算していけば、

$$\left(c \frac{d^2 t}{d\sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2 r_k}{d\sigma^2}\right)^2 = \left(c \frac{d^2 \tau}{d\sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2 r_k}{d\sigma^2}\right)^2 \quad (\text{A.8})$$

という関係が成り立っているコトを示せるハズです (計算は、めちゃくちゃメンドクさいですけど、特別なベクトル解析の公式などは使わずに、単純な式変形だけで示せるので、頑張ってみてください)。

□速度に関するローレンツ不変量 = (A.6) 式と、加速度に関するローレンツ不変量 = (A.8) 式が、まったく同じカタチをしているコトは、興味深いトコロです。また、これらの関係式を見てみると、ますます、「考える質点自身の固有時間 σ 」の重要性を、意識せざるをえない感じがしますね。

■速度や加速度に関するローレンツ不変量が明らかになったので、最後に、力に関するローレンツ不変量についても、調べておきましょう。ココで、改めて、「特殊相対論的に正しい運動方程式 = (6.1) 式」を見返してみると、 t で微分されるカッコ内の部分が、(A.4) 式で与えられている $dr_k/d\sigma$ のカタチと、同じであるコトに、気がきます。すなわち、

$$\mathbf{F}_k = m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dr_k}{d\sigma} \right) \quad (\text{A.9})$$

と書き直せるコトが分かります。さらに、合成関数の微分の法則と、(A.3) 式を使うと、

$$\mathbf{F}_k = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dr_k}{d\sigma} \right) = m \frac{d\sigma}{dt} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dr_k}{d\sigma} \right) = m \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \left(\frac{d^2 r_k}{d\sigma^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

となります。 κ 系にいる観測者から見た、質点にはたらく力 \mathbf{F}_k についても、同じ要領で、

$$\mathbf{F}_k = m \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \left(\frac{d^2 r_k}{d\sigma^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

となるのが分かるハズです。(A.10) 式と (A.11) 式を、(A.8) 式に代入して、整理すると、

$$\left(mc \frac{d^2 t}{d\sigma^2} \right)^2 - \left(\frac{\mathbf{F}_k}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right)^2 = \left(mc \frac{d^2 \tau}{d\sigma^2} \right)^2 - \left(\frac{\mathbf{F}_k}{\sqrt{1 - (\omega/c)^2}} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

という関係を導くコトができます。(A.12) 式が、力に関するローレンツ不変量というコトになります。ココでも、「考える質点自身の固有時間 σ 」の重要性は、無視できないコトを、思い知らされますね。

□まったくの余談ですけど、(A.12) 式を見てみると、「相対論的質量 ($m' = m/\sqrt{1 - (u/c)^2}$)」という概念は、ココでも、まったく合理的ではない——と言わざるをえない気がします。

■以上、質点の運動に関する、いろいろなローレンツ不変量を、求めるコトができました。それでは、これらのローレンツ不変量を使って、ナニができるようになるのでしょうか。繰り返しになりますが、特殊相対論の世界だけで完結するハナシならば、これらのローレンツ不変量は、**具体的・実用的な問題を解くための武器・道具としては、まったく、役に立たないと思われる**。

■実は、ココで紹介したローレンツ不変量のハナシは、多くの特殊相対論の教科書や解説などで、詳しく説明されている、「4 ベクトル」——すなわち、「4 元運動量」とか、「4 元速度」とかのハナシと、とても深く関わっています。そして、当然、「4 元ベクトル」も、**特殊相対論の具体的・実用的な問題を解くために、必要となるコトはありません**。それなら、なぜ、多くの特殊相対論の教科書や解説などで、詳しく説明されているのでしょうか。2 つの理由がある、と思われます。1 つ目の理由は、「固有時」や「4 元ベクトル」を使うと、特殊相対論の体系が、より数学的にエレガントなカタチで表せるからです。このコトは、**実用的な役に立たないとしても、「時間とはナンぞや」とか、「特殊相対論の理論的本質とは、如何なるモノか」とかいった、哲学的な思索にとっては、とても重要です**。特に、ローレンツ変換やミンコフスキー空間、相対論的電磁気学などの意味・本質を考える上で、**必須の概念**となるでしょう。

□ちなみに、「質量とはナンぞや」という哲学的な思索に耽る場合、ココでは、一貫して、いわゆる「相対論的質量」という概念・解釈を、否定していますが、**「固有時」や「4 元ベクトル」の概念を突き詰めると、ハナシは、単純ではなくなるかも知れません**。いま、質点の速さ u に依存して値が変化する「相対論的質量」を $m'(u)$ で表し、いわゆる「静止質量 (固有質量)」を m で表すと、

$$m'(u) = \frac{m}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (\text{A.13})$$

という関係があるとされています。このとき、(A.13) 式と、「固有時」の概念を使って、「運動量に関するローレンツ不変量」を書き直してみると、

$$(cm'(u))^2 - p_k^2 = (cm'(\omega))^2 - p_k^2 \quad (\text{A.14})$$

$$\left(c \frac{dm'(u)}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dp_k}{d\sigma}\right)^2 = \left(c \frac{dm'(\omega)}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dp_k}{d\sigma}\right)^2 \quad (\text{A.15})$$

のようになります。コレは、一見、数学的にエレガントな表現に感じられます。でも、もっと詳しく検討してみると、やっぱり、いろいろなトコロで、ボコが出てくるように思われます。藤野の勝手な印象だと、「慣性質量」と「有効質量」、または、「質量密度 (物質密度)」の混同があるような気がします。哲学的な思索に興味があるなら、詳しく検討してみても、いかがでしょうか。

■もう 1 つの重要な理由は、**特殊相対論から、一般相対論に進むために、「固有時」や「4 元ベクトル」などの概念が、絶対に欠かせないからです**。一般相対論は、「一般相対性原理」から、出発しています。一般相対性原理は、「座標系は、人間が自然を記述するために、便宜的に導入したモノサンに過ぎない。モノサンが変わって、座標や物理量などの見かけ上の値が変わっても、自然を支配する物理法則自体は、変わるハズがない。すなわち、真に本質的な物理法則は、座標変換をしても、そのカタチは変わらない」という信念です。この信念に基づいて、新たな理論を構築するためには、座標変換をしても値を変えない「ローレンツ不変量」や、座標の取り方に煩わされずに計算ができる「特殊相対論的に正しい解析力学」の概念や知識が、絶対に不可欠なのです。

■そんなワケで、この先は、第 6 節までの内容を駆使して、「ウラシマ効果」や「光子ロケットの運動」などの、いろいろな SF ネタの具体的な計算に励むのも、とてもオモシロいと思えますし、第 7 節以降の話題を突き詰めて、一般相対論の勉強に挑むのも、良いでしょう。もちろん、欲張って、その両方を選ぶ——というコトだって、タイヘンそうですけど、最高に楽しいに違いありません。そうして、ぜひとも、自分なりに、特殊相対論の世界を、味わい尽くして下さいね。

