

「ウラシマ効果」の時間遅れを、計算してみよう！ —— この式に、好きな数値を代入するだけで、時間のズレ方が分かるよ！

■『「動いている時計は、遅くなる」の間違いを暴く！』で説明したように、お互いに静止していない時計は、お互いの指し示す時刻が、ズレていきます。そうすると、「それならば、どのような場合には、どれだけ時間がズレるのか？」を、自分で、いろんな状況を考えて、自由自在に計算してみたくありませんか。

■実は、わりと簡単な公式に、好きな設定の数値を代入するだけで、「どれだけ時間がズレるのか？」を、計算するコトができるのです。ココでは、その公式を紹介して、実際に、いろいろと計算してみましよう。

【目次】

1. まずは、復習から。
—— 「動いている時計」に、ナニが起きるのか？
2. 単位は、とっても大切。
—— 光の速さは、「1」でOK!?
3. コレが、「ウラシマ公式」だ！（その1）
—— 等速直線運動 Ver.
4. コレが、「ウラシマ公式」だ！（その2）
—— 等加速度直線運動 Ver.



■ 1. まずは、復習から。—— 「動いている時計」に、ナニが起きるのか？

■ありさとリトこが、離れた場所において、お互いに静止していないときには、「ありさの持っている時計」と「リトこの持っている時計」の時刻や時間の進み方を、直接、比較する方法はないのです。特殊相対論の世界では、2人が離れた場所において、お互いに静止していないときには、お互いに、相手の持っている時計を、直接、見比べるコトができないからです（詳しくは、『「動いている時計は、遅くなる」の間違いを暴く！』の第1節「時計を合わせる」って、意外と大変？」を参照）。

■たしかに、2人の持っている時計を、直接、見比べるコトはできません。とは言え、「ありさ系の時計」や「リトこ系の時計」を準備しておくコトで、2人の持つ時計の時刻や時間を、**間接的に**、比べるコトならば、できます。ところが、そうすると、いろいろと、奇妙なコトが起こるのでした。詳しくは、『「動いている時計は、遅くなる」の間違いを暴く！』を見てもらうとして、このときに起こるコトを、SF作品に出てくるような「ウラシマ効果」のイメージに当てはめて、示してみると、下の図のような感じになるでしょう。

■ 「ウラシマ効果」の「時間遅れ」って、一般的なイメージを、正しく描くと、こんな感じかな。



■以下では、このイメージをもとに、「静止しているリトこ & ナーの持っている時計」と、「運動しているありさの持っている時計」の、それぞれが指し示す時刻や、それらの時刻のズレについて、自由に手軽に計算できる公式を、紹介していきます。

■ 2. 単位は、とっても大切。—— 光の速さは、「1」でOK!?

■ところで、現実に「ウラシマ効果」が問題になるようなシチュエーションでは、距離なら数光年のスケールになるでしょうし、時間なら数年のスケールになるでしょう。そうすると、単位の換算が、大変になりそうです。通常は、時間の単位は[年]、距離の単位は[光年]、速さの単位は「光速 c の〇倍」で統一すれば、簡単に計算できます。そこで、一応念のため、本題に入る前に、ココで、単位の換算式を、示しておきましょう。

■まず、便利な記号を、導入しましょう。光の速さ c は、国際単位系 (SI) では、 $299\,792\,458$ [m/秒] と定義されています。この数値部分を、 C_{SI} と表すコトにしましょう。つまり、 $C_{SI} = 299\,792\,458$ となります。また、ユリウス暦で、1 [年] は、 365.25 [日] = $31\,557\,600$ [秒] と定義されています。この数値部分を、 A_J と表すコトにしましょう。つまり、 $A_J = 31\,557\,600$ です。すると、単位の換算式は、次のように、簡単な形になります。

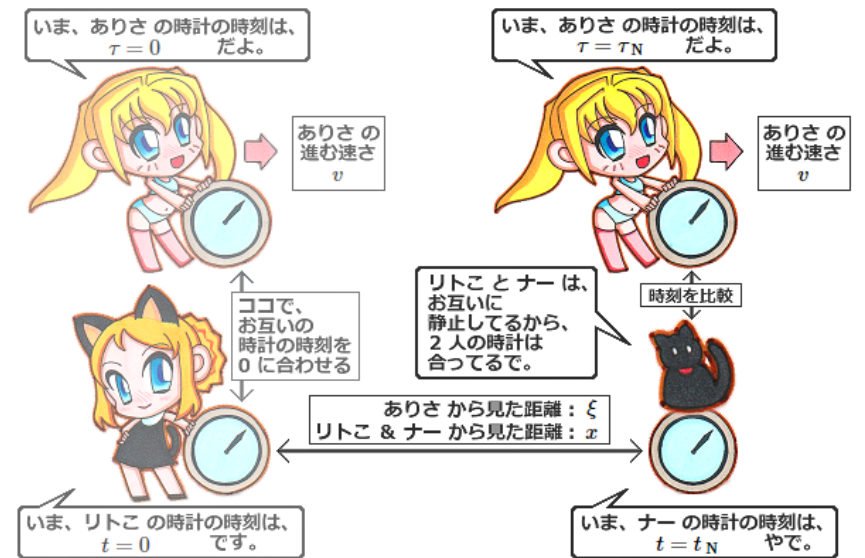
- 時間：1 [年] = 365.25 [日] = $31\,557\,600$ [秒]
つまり、1 [年] = A_J [秒]
- 距離：1 [光年] = $299\,792\,458$ [m/秒] × $31\,557\,600$ [秒]
つまり、1 [光年] = $C_{SI} \cdot A_J$ [m]
- 速度：1 [光年/年] = $299\,792\,458$ [m/秒]
つまり、1 [光年/年] = C_{SI} [m/秒]
- 加速度：1 [光年/年²] = $299\,792\,458$ [m/秒] ÷ $31\,557\,600$ [秒]
つまり、1 [光年/年²] = C_{SI}/A_J [m/秒²] (≈ 9.500 [m/秒²])

■特に、[年] と [光年] で、すべての単位を揃えると、光の速さ c が、 $c=1$ [光年/年] となるコトは、実際に計算するとき、とっても便利なので、覚えておくとうれいですよ！

■ 3. コレが、「ウラシマ公式」だ！（その1）—— 等速直線運動 Ver.

■まず最初に、距離 x だけ離れて、お互いに静止している、リトこ と ナー のあいだを、ありさが、速さ v の等速直線運動で、駆け抜けて行くコトを、想像してみましょう。次の図のような感じです。

■ コレが、「ウラシマ公式」だ！（その1）—— 等速直線運動 version 【状況設定図】



■この図のような条件で、ありさが、ナーのトコロに到着したとき、ありさの持っている時計の時刻 τ_N と、ナーの持っている時計の時刻 t_N は、光の速さ (光速) を c で表すと、次の公式で、計算できます。

$$t_N = \frac{x}{v} \tag{3.1}$$

$$\tau_N = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot \frac{x}{v} \quad \text{したがって} \quad \tau_N = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot t_N \tag{3.2}$$

このように、意外なほど簡単な式で、計算できるんです。こんな簡単な公式なら、皆さんも、自分で、自由に、計算してみたくありませんか。ぜひ、いろんな設定を考えて、計算してみてくださいね！

□ちなみに、この公式に出てくる $\sqrt{1-(v/c)^2}$ の値が、必ず 1 より小さくなるコトは、とても重要です。このコトから、ありさが ナー のトコロに到着したとき、ありさの持っている時計の時刻 τ_N は、ナーの持っている時計の時刻 t_N よりも、必ず、小さくなるコトが、分かります。つまり、ありさの持っている時計は、ナーの持っている時計よりも、必ず、時間の進み方が遅くなっている——というコトです。

□ところで、このとき、リトこ や ナー から見ると、ありさは、右向きに速さ v で進んでいます。逆に、ありさ から見ると、リトこ も ナー も、左向きに速さ v で進んでいます。直感的に考えると、ありさと、リトこ & ナー は、時間の進み方が違うので、「距離÷時間」で表される「速さ」が、どちらも同じ大きさというのには、奇妙に感じるかも知れません。でも、詳しく計算してみると、ちゃんと、どちらから見ても、相手は、（当然、向きは逆になるけど）速さ v で進んでいるように見えるコトが、分かります。

■それでは、実際に、計算をしてみましょう。いま、リトこ は地球にいて、ナー は（地球からイチバン近い、太陽系外恒星の）ケンタウルス座 α 星にいますとします。地球とケンタウルス座 α 星のあいだの距離は、資料によって、4.1~4.4 [光年] と幅がありますけど、計算をラクにするため、ココでは 4.4 [光年] とします（正確な値での計算は、皆さんと挑戦してみてください）。すると、 $x = 4.4$ [光年] というコトになります。ありさの進む速さは、光速 c の 0.8 倍としてみます。すると、 $v = 0.8$ [光年/年] となります（速さの単位を [光年/年] で統一すると、光速 c が、 $c = 1$ [光年/年] となるコトを、思い出しましょう）。コレらの値を、公式 (3.1) と公式 (3.2) に、代入してみます。すると、**ありさが、ナーのトコロに到着したとき、ナーの持っている時計の時刻 t_N は、 $t_N = 5.5$ [年]、ありさの持っている時計の時刻 τ_N は、 $\tau_N = 3.3$ [年] となるのが分かります。「ありさの持っている時計のほうが、時間の進み方が遅くなっている」というのは、こういうコトです。**

□同じ要領で、いろいろ設定を変えて計算してみると、いろいろオモシロい発見が、あるかも知れません。たとえば、ありさの進む速さ v が、現実的なロケットの速さくらいだと、どうなるのでしょうか。また、光の速さに、どんどん近づいていくと、時間の進み方は、どのように変化していくのでしょうか。

■ところで、ありさが、リトこのトコロを出発して、ナーのトコロに到着するまで、ありさの時計で、時間は τ_N だけ経っています。ありさは、ずっと、速さ v で進んでいたんで、ありさが進んだ距離 ξ は、

$$\xi = v \cdot \tau_N = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot x \quad (3.3)$$

というコトになります。リトこ と ナー のあいだの距離は、 x だったはずですが、ありさにとっては、それよりも短い距離 ξ しか進んでいないのに、ナーのいるトコロに着いてしまうコトになるのです。なんと不思議なコトですけど、いったい、どういうコトなのでしょう？

■ココで、『**動いている時計は、遅くなる**』の間違いを暴く！』のハナシでは、「離れた場所にある 2 つの時計の時刻や進み方が、ホントに合っているのかを、どうやって確認すれば良いのか」という問題が、すべての始まりであったコトを、思い出して下さい。同じようなコトが、「離れた 2 点間の距離を、どうやって測れば良いのか」という問題にも、付きまとってくるのです。リトこ と ナー のように、**お互いに静止している場合なら、2 人のあいだの距離 x を測るのは、簡単です**（たとえば、レーザー測距の原理で、測れます）。でも、ありさとナーのように、**お互いに静止していない場合は**、「2 人のあいだの距離」を、どうやって測るのか、どこまでも注意深く、考える必要が生じます。意外なコトかも知れませんが、実は、「離れた 2 点間の距離」は、「離れた場所にある 2 つの時計」以上に、日常の常識が通用しない、難しい問題なのです。

□「**ガレージのパラドックス**」という言葉も、聞いたコトがあるでしょうか。このパラドックスは、直感的には、極めて単純に感じますが、離れた場所にある 2 つの時計の問題と、「離れた 2 点間の距離」の問題が、両方とも絡んでくるので、ちょっと油断すると、すぐに騙されてしまうでしょう。「離れた場所にある 2 つの時計」の問題だけを考えれば良い「ウラシマ効果（双子のパラドックス）」よりも、遥かに難しい問題ですので、相対論に自信が身についたら、ぜひ、挑戦してみてくださいね。

□「ガレージのパラドックス」は聞いたコトがなくても、「**ローレンツ収縮**」という言葉なら、聞いたコトがある——という人は、多いかも知れません。リトこ と ナー のあいだの距離 x よりも、ありさが進んだ距離 ξ が短くなっている（つまり、長さが収縮している？）コトも、「ローレンツ収縮」という言葉で、説明されるコトが多いようです。でも、「離れた 2 点間の距離」は、複雑で微妙な問題を含んでいます。だから、「ローレンツ収縮」という言葉で、安易に分かった気になるのは、ちょっと危うい気がします。

□たとえば、「動いている物体は、ローレンツ収縮によって、縮んで見える」といった説明は、ありがちに感じますが、かなり、誤解を与える表現なので、注意が必要です。特に、SF 作品を楽しむ人が、絶対に忘れて欲しくないのは、「ある距離のトコロに『ある』」というのは、「ある距離のトコロに『見える』」とは、まったく違う——というコトです。「見える」においては、「対象がどの位置にあるのか」よりも、「対象から来た光が、観測者の目に入るまでの経路がどうなっているのか」というコトが、重要なのです。とっても長い蛍光灯を考えると、分かりやすいかも知れませんが、蛍光灯の右端から出た光と、左端から出た光が、ある時刻に、同時に、観測者の目に入ってきたとします。でも、観測者から蛍光灯の右端までの距離と、観測者から蛍光灯の左端までの距離が、異なる場合は、どうなるのでしょうか。別々の時刻に出た光が、ある時刻に、同時に、観測者の目に入ってくるコトになります。さらに、蛍光灯や観測者の位置や姿勢が、とっても速く変化している場合を、考えてみてください。観測者の目に同時に入ってきた光は、すべて、違う時刻に——つまり、違う位置・姿勢のときに、蛍光灯の各部分から出た光なのです。そうすると、観測者が「見る」蛍光灯は、部分ごとに、違う位置・姿勢になっているはずなんです。たとえ、本来は真っ直ぐな蛍光灯だとしても、観測者には、かなり歪んだカタチに見えるかも知れません。そんなワケで、特に、SF 作品を楽しむときには、「ローレンツ収縮」という言葉に、安易に騙されないよう、要注意ですよ！

■4. コレが、「ウラシマ公式」だ！（その2）—— 等加速度直線運動 Ver.

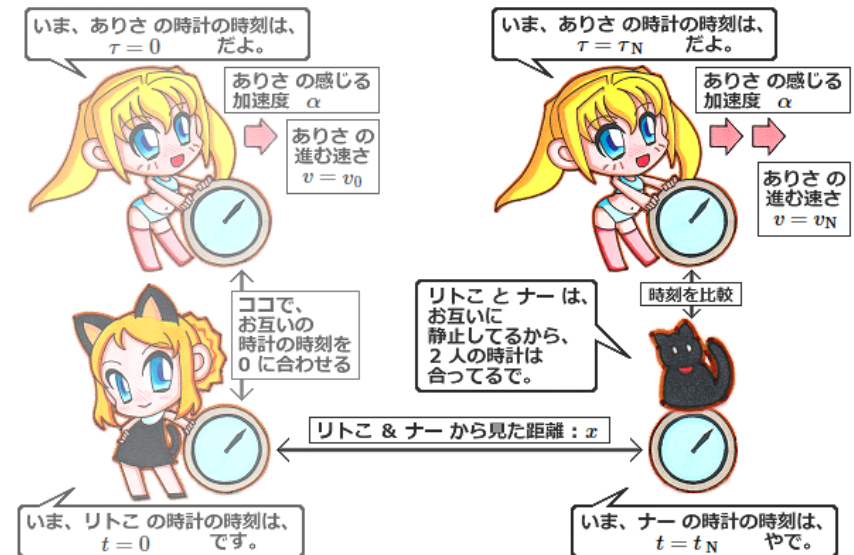
■さて、次は、距離 x だけ離れて、お互いに静止している、リトこ と ナー のあいだを、ありさが、加速度 α の等加速度直線運動で、駆け抜けて行くトコロを、想像してみましょう。実は、この場合は、「ココで出てくる『加速度 α 』とは、いったい、誰から見た加速度なのか？」というコトが、問題になってきます。**お互いから見た、お互いの速さ v とは違ひ、加速度は、観測する人や測り方で、変わってきちゃうから**です。

■ココで、**加速している物体には、「慣性力」がはたらくコトを、思い出して下さい**。いまの場合だと、実際に加速度運動をしているありさには、慣性力がはたらきます。リトこ や ナー には、はたらきません。加速度が大きいと、大きな慣性力がはたらき、加速度が小さいと、はたらきも小さくなります。それなら、もし、ありさが、つねに一定の大きさの慣性力を感じているならば、ありさは、つねに一定の大きさの加速度で運動している——と言うコトが、できるはずなんです。そこで、以下では、ありさが感じる慣性力の大きさに対応する加速度の大きさを、「ありさの感じる加速度 α 」として、計算を進めていくコトにします。

□ちなみに、「リトこ & ナー から見たありさの加速度」、「ありさが、自分の感じる慣性力の大きさから判断した、自分の加速度」、「ありさが、自分の周囲の慣性力が流れていく速さの変化から判断した、自分の加速度」は、それぞれ、ぜんぜん、異なる値になります（ココでは、2 番目に説明した「加速度」を、「ありさの感じる加速度 α 」としています）。ホントに、相対論は、やこしいですね。

■以上のハナシを踏まえて、設定を振り返ってみると——いま、リトこ & ナー から見て、距離 x だけ離れてお互いに静止している、リトこ と ナー のあいだを、ありさが、初速度 v_0 、加速度 α の等加速度直線運動で、駆け抜けて行くトコロを、想像していたのでした（ココに出てくる「加速度 α 」は、上の説明における 2 番目の「ありさの感じる加速度 α 」のコトです）。この設定を、図にすると、次のような感じになります。

■コレが、「ウラシマ公式」だ！（その2）—— 等加速度直線運動 version 【状況設定図】



■このような条件で、ありさが、ナーのトコロに到着したとき、ありさの持っている時計の時刻 τ_N と、ナーの持っている時計の時刻 t_N 、および、ありさの進む速さ v_N を表す公式を、考えてみましょう。まず、公式を見やすくするために、次のような記号 γ_0 を、導入しておきます（なお、 c は、光速です）。

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad (4.1)$$

ちなみに、この γ_0 は、ありさの初速度（ありさが、リトこのトコロを出発するときの速さ） v_0 が、 $v_0 = 0$ のとき、 $\gamma_0 = 1$ となります。この γ_0 を使って、ありさが、ナーのトコロに到着したとき、ありさの持っている時計の時刻 τ_N 、ナーの持っている時計の時刻 t_N 、および、ありさの進む速さ v_N を計算する公式を表すと、光の速さ（光速）を c として、それぞれ、



$$t_N = \frac{c}{\alpha} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\alpha}{c^2}x + \gamma_0\right)^2 - 1} - \gamma_0 \frac{v_0}{c} \right\} \quad (4.2)$$

$$\tau_N = \frac{c}{\alpha} \left\{ \cosh^{-1}\left(\frac{\alpha}{c^2}x + \gamma_0\right) - \sinh^{-1}\left(\gamma_0 \frac{v_0}{c}\right) \right\} \quad (4.3)$$

$$v_N = c \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{c^2}x + \gamma_0\right)^{-2}} \quad (4.4)$$

となります。**双曲線関数**まで出てきて、とっても複雑な式のように、感じられますね（双曲線関数については、皆さんで、調べてみて下さい）。でも、関数電卓（2000～3000円くらいの、手のひらサイズのモノで、十分です）があれば、すぐに、簡単に、自由自在に、計算できますよ。さらに、ありが、リトこのトコロを出発するときの速さ（初速度） v_0 が、 $v_0 = 0$ のときは、次のように、比較的、簡単な式になります。

$$t_N = \frac{c}{\alpha} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{c^2}x + 1\right)^2 - 1} \quad , \quad (\text{ただし、} v_0 = 0) \quad (4.5)$$

$$\tau_N = \frac{c}{\alpha} \cosh^{-1}\left(\frac{\alpha}{c^2}x + 1\right) \quad , \quad (\text{ただし、} v_0 = 0) \quad (4.6)$$

$$v_N = c \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{c^2}x + 1\right)^{-2}} \quad , \quad (\text{ただし、} v_0 = 0) \quad (4.7)$$

□なお、ココでの速さ v_N は、「リトこ & ナー から見た ありが の進む速さ」=「ありが が、自分の周囲の背景が流れていく速さから判断した、自分の進む速さ」です。**ありが 自身は、一定の大きさの慣性力を感**じているので、一定の大きさの加速度で運動していると、思っているでしょう。だから、自分の進む速さは、「速さ」=「加速度」×「時間」という公式で、計算できるハズです。この公式では、「時間」の値が大きくなると（つまり、十分に長い時間が経つと）、「加速度」が一定ならば、いつかは、「速さ」が光の速さを超えてしまいます。だけど、どれだけ時間が経っても、公式（4.4）や公式（4.7）の v_N は、光の速さ c を超えません。ホントに、相対論の世界は、ワケの分からないコトだらけですね。

■では、早速、計算してみましょう。先ほどと同じように、リトこ は地球にいて、ナー はケンタウルス座 α 星にいます。また、先ほどと同じように、リトこ と ナー のあいだの距離 x を、 $x = 4.4$ [光年] として、計算するコトにします。さらに、ありが が、リトこのトコロを出発するときの速さ v_0 は、 $v_0 = 0$ [光年/年] としましょう。まとめると、地球上で静止している ありが が、加速を始めて、ケンタウルス座 α 星を目指して、加速し続けていくのです。最後に、ありが の感じる加速度 α は、地球の重力加速度と同じとします。つまり、 $\alpha = 1$ [G] = 9.8 [m/秒²] です。第 2 節で説明した単位の換算式を使うと、 $\alpha = 9.8 \times A_1 / C_{S1}$ [光年/年²] となります。もちろん、光の速さ c は、 $c = 1$ [光年/年] です。

■さて、このような設定で計算してみると、 $v_0 = 0$ なので、公式（4.5）～（4.7）が使えて、**ありが が、ナーのトコロに到着したとき、ナーの持っている時計の時刻 t_N は、 $t_N = 5.281$ [年]、ありがの持っている時計の時刻 τ_N は、 $\tau_N = 2.323$ [年]、ありがの進む速さ v_N は、 $v_N = 0.984 c$ （つまり、光速 c の 0.984 倍の速さ）となるコトが、分かります。やはり、ありがの持っている時計のほうが、時間の進み方が遅くなっていますね。**

□等速直線運動の場合と同じく、等加速度直線運動の場合でも、いろいろと設定を変えて計算してみると、いろいろと興味深い発見があるかも知れません。ちなみに、「等加速」と書いていますが、ありがが減速していく場合は、「ありがの感じる加速度 α 」に、マイナスの値を代入すれば、まったく同じ公式が使えます。たとえば、ありがが、地球の重力加速度と同じ大きさの加速度で「減速」する場合には、 α に -9.8 [m/秒²] を代入すれば、OK です。

■ココまで、「ありが が、等速直線運動する場合」と、「ありが が、等加速度直線運動する場合」について、「ウラシマ公式」を、紹介しました。加速度が一定ではないような場合のハナシは、ココでは割愛しますが、多くの宇宙旅行では、この 2 つの場合を組み合わせ、計算ができるでしょう。たとえば、「ありが は、出発してから、一定の加速度で加速し、ある速さに到達すると、その後は、等速で巡航する。そして、目的地の直前まで来たら、一定の割合で減速して、目的地に到着する」とか、「ありが は、出発してから、一定の加速度で加速する。ある地点まで来たら、反転して、逆向きに加速して、出発地に戻る」とか、設定は、自由に、無限に考えられるでしょう。いろいろな設定で、「ウラシマ効果」の計算をしてみると、オモシロいかも知れません。そのなかで、実際に、SF 作品に使えそうな、興味深い設定が、生まれてくるかも知れませんね♪



ERO-GAME BRAND "Littlewitch" presents PERIOD

